



FA 7 A 222-II

OPERUM NEWTONI

TOMUS SECUNDUS.

Vol. II.

a

ISAACI NEWTONI

O P E R A

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

L O N D I N I :
EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXIX.

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

IN HOC TOMO CONTINENTUR

Principiorum Libri Priores duo, De Motu Corporum.

IN
VIRI PRÆSTANTISSIMI
ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE
MATHEMATICO-PHYSICUM
SECVLI GENTISQVE NOSTRÆ DECUS EGREGIVM.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol folio residens ad se jubet omnia pronò
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula gyris.
Jam patet, horrificis quæ sit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aëtri.
Discimus hinc tandem quâ causa argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset;
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Discimus & quantis refluxum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, fessis dum fluctibus ulvam
Deferit, ac nautis suspectas nudat arenas;
Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.
Quæ toties animos veterum torfere soporum,
Quæque scholas frustra rauco certamine vexant,

Obvia confpicimus, nubem pellente Matheſi.
Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
Queis ſuperùm penetrare domos, atque ardua cæli
Scandere, ſublimis genii conceſſit acumen.

Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vitâ longe lateque remotæ.

Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctoꝝ erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uvâ;
Vel qui Niliacâ monſtravit arundine pictos
Confociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam fortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantùm ſolamina vitæ.
Jam verò ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.

Talia monſtrantem mecum cælebrate camænis,
Vos ô cælicolùm gaudentes neſtare veſci,
NEWTONUM clauſi referantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO

A D

L E C T O R E M.

CUM Veteres Mechanicam (uti auctor eſt Pappus) in rerum naturalium investigatione maximi fecerint; & Recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc tractatu Matheſin excolere, quatenus ea ad Philoſophiam ſpectat. Mechanicam verò duplicem Veteres conſtituerunt: rationalem, quæ per demonstrationes accuratè procedit, & practicam. Ad practicam ſpectant artes omnes manuales, à quibus utique Mechanica nomen mutuata eſt. Cum autem artifices parùm accuratè operari ſoleant, fit ut Mechanica omnis à Geometriâ ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad Geometriam referatur, quicquid minùs accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non ſunt artis, ſed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperſectior eſt Mechanicus, & ſi quis accuratiſſimè operari poſſet, hic foret Mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & linearum reſtarum & circularum deſcriptiones, in quibus Geometria fundatur, ad Mechanicam pertinent. Has lineas deſcribere Geometria non docet, ſed poſtulat. Poſtulat enim ut tiro eaſdem accuratè deſcribere priùs didicerit, quàm limen attingat Geometriæ; dein, quomodo per has operationes Problemata ſolvantur, docet; rectas & circulos deſcribere Problemata ſunt, ſed non Geometrica. Ex Mechanicâ poſtulat horum ſolutio, in Geometriâ docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur Geometria quòd tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur Geometria in praxi mechanicâ, & nihil aliud eſt quàm Mechanicæ univerſalis pars illa, quæ artem menſurandi accuratè proponit ac demonſtrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè verſentur, fit

VOL. II.

b

ut

ut Geometria ad Magnitudinem, Mechanica ad Motum vulgò reſeratur. Quo ſenſu Mechanica Rationalis erit ſcientia Motuum, qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & Virium quæ ad motus quoscuque requiruntur, accuratè propoſita ac demonſtrata. Pars hæc Mechanicæ à Veteribus in potentiis quinque ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cùm potentia manualis non ſit) vix aliter quàm in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non Artibus ſed Philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maximâ tractamus, quæ ad Gravitationem, Levitatem, vim Elæſticam, Reſiſtentiam Fluidorum, & ejuſmodi vires, ſeu attrahivas, ſeu impulſivas, ſpectant: et ea propter, hæc noſtra tanquam Philoſophiæ Principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut à phænomenis motuum inveſtigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonſtrems phænomena reliqua. Et hæc ſpectant Propoſitiones generales, quas libro primo & ſecundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum huius rei propoſuimus per explicationem Syſtematis Mundani. Ibi enim, ex phænomenis cæleſtibus, per Propoſitiones in libris prioribus mathematicè demonſtratis, derivantur vires Gravitationis, quibus corpora ad Solem & Planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propoſitiones etiam Mathematicas, deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lune & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis mechanicis, eodem argumentandi genere, derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particule, per cauſas nondum cognitæ, vel in ſe mutuò impelluntur & ſecundum figuras regulares coherent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hætenus Naturam fruſtra tentarunt. Spero autem quòd vel huic philoſophandi modo, vel veriori alicui, principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, vir acutiſſimus & in omni Literarum genere eruditiffimus Edmundus Halleius operam navavit, nec ſolum typothetarum ſpælmata correxit, & ſchemata incidi curavit, ſed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggredere. Quippe cùm demonſtratam à me figuram Orbium Cæleſtium impetraverat, rogare non deſtitit, ut eandem cum Societate Regali communicarem, quæ deinde hortatibus

hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit, ut de eadem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At poſtquam motuum Lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cœpiſſem, quæ ad leges & meſuras Gravitationis & aliarum virium, & figuras à corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attrahitis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in Mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus Mediorum, ad orbis Cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & unâ in publicum darem. Quæ ad motus Lunares ſpectant (imperfecla cùm ſint) in Corollariis Propoſitionis LXVI. ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quàm pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum Propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſerò inventa locis minùs idoneis inferere malui, quàm numerum Propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur, & defectus in materiâ tam difficili non tam reprebendantur, quàm novis lectorum conatibus inveſtigentur, & benignè ſuppleantur, enixè rogo.

Dabam Cantabrigiæ, à Collegio
S. Trinitatis, Maii 8, 1686.

I S. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

I N

EDITIONEM SECUNDAM.

IN hac secundâ Principiorum editione multa sparsim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In Libri Primi Sectione II. inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi possint, facilior redditur & amplior. In Libri Secundi Sectione VII. Theoria Resistentiæ Fluidorum accuratius investigatur, & novis experimentis confirmatur. In Libro Tertio Theoria Lunæ & Præcessio Æquinoctiorum ex principiis suis plenius deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratius computatis orbium exemplis confirmatur.

Dabam Londini,
Mar. 28, 1713.

I S. NEWTON.

COTESII

COTESII PRÆFATIO

I N

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ Philosophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque desideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philosophiæ.

Quæ Physicam tractandam susceperunt, ad tres fere classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus Qualitates específicas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ Scholasticæ, ab *Aristotele* & Peripateticis derivatæ. Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cùmque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, Philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiae laudem consequi sperârunt, rejectâ vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam universam Homogeneam esse, omnem verò Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidam progressio instituitur à simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit Natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus: quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cùm vix etiam per certissimas observationes investi-

gari.

gari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab Hypothesibus; etiam si deinde secundum leges Mechanicas accuratissime procedant; fabulam quidem, elegantem forte & venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Reliquitur adeo tertium genus, qui Philosophiam scilicet Experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem Principii loco assumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in Physicam recipiunt, nisi ut quaestiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, Analytica & Synthetica. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesein reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris merito amplectendam censuit celeberrimus Auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, Mundani nempe Systematis explicationem è Theoriâ Gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille & solus ex apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse iudicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium à simplicissimis & proximis; discipiamus paulisper qualis sit in Terrestribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Cælestia, longissimè à sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in Terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas Relativa, non est vera Levitas, sed apparens solummodò; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitent in Terram, ita Terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguat Terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro Terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires

vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitibus materiæ movendæ. Jam verò corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quòd in Vacuo *Boyleano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describant, sublatâ scilicet Aëris resistentiâ: accuratius autem comprobatur per experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in Terram & Terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis quâ corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque Terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium actionibus consari censenda erit; atque adeo corpora omnia Terrestria se mutuo trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis sit in Cælis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; Naturæ lex est ab omnibus recepta Philosophis. Inde verò sequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbis suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolvantibus necessariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter à Tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur & certissimè demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, quæque radio ducto ad punctum, vel quiescens vel utcunque motum, describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confesso sit apud Astronomos, Planetas primarios circum Solem, secundarios verò circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, quâ perpetuo detorquentur à Tangentibus rectilineis, & in orbitis curvilineis revolvî coguntur, versus corpora dirigatur, quæ sita sunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari potest, respectu quidem corporis revolvantis, Centripeta; respectu autem corporis centralis, Attractiva; à quâcunque demum causâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda sunt, & mathematicè demonstrantur: si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum à centro communi; vires centripetas revolvantium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in orbitis quæ sunt Circulis finitima, & quiescant orbitarum Apfides; vires centripetas revolvantium fore reciproce ut quadrata

drata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in Planetis universis consentiunt Astronomi. Itaque vires centripetæ Planetarum omnium sunt reciproce ut quadrata distantiarum ab orbium centrīs. Si quis objiciat Planetarum, & Lunæ præsertim, Apfides non penitus quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest, etiam si concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse, quod vis centripetæ proportio aberret aliquantum à duplicatâ, aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse & planè insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc verò sexaginta ferè vicibus propius accedet quàm ad triplicatam. Sed verior erit responsio, si dicamus hanc Apfidum progressionem, non ex aberratione à duplicatâ proportionem, sed ex aliâ prorsus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè demonstratur in hac Philosophiâ. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt versùs Solem & secundarii versùs primarios suos, sint accuratè ut quadrata distantiarum reciproce.

Ex iis quæ hæcenus dicta sunt, constat Planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuò agentem: constat vim illam dirigi semper versùs orbitarum centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportionem qua diminuitur quadratum distantiae, diminui in eadem proportionem quâ distantiae quadratum augetur. Videamus jam, comparatione institutâ inter Planetarum vires centripetas & vim Gravitatis, annon ejusdem fortè sint generis. Ejusdem verò generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eadem, eademque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi à viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripetæ Lunæ in orbitâ suâ revolvens, ad vim Gravitatis in superficie Terræ, ut spatium, quod tempore quàm minimo describeret Luna, descendendo per vim centripetam versùs Terram, si circulari omni motu privari fingeretur, ad spatium, quod eodem tempore quàm minimo describet grave corpus in vicinâ Terræ, per vim Gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcus, à Lunâ per idem tempus descripti, sinui verso; quippe qui Lunæ translationem de Tangente, factam à vi centripetâ, metitur; atque adeo computari potest ex datis tum Lunæ tempore periodico, tum distantia ejus à centro Terræ. Spatium posterius invenitur per experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta Lunæ, in orbitâ suâ revolventis, ad vim Gravitatis in superficie Terræ, erit ut quadratum semidiametri Terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta Lunæ, in orbitâ suâ revolventis, ad vim Lunæ centripetam prope Terræ superficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ superficiem æqualis est vi Gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una

atque

atque eadem: si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quàm ex vi solâ Gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quâ Luna perpetuò de Tangente vel trahitur vel impellitur, & in orbitâ retinetur, ipsam esse vim Gravitatis terrestres ad Lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est, ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cum nullam ejus sensibilem diminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutuâ, Terra vicissim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac Philosophiâ, ubi agitur de Maris Æstu & Æquinoctiorum Præcessionem, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirum lege vis Gravitatis decrescat in majoribus à Tellure distantis. Nam cum Gravitatis non diversa sit à vi centripetâ Lunari, hæc verò sit reciproce proportionalis quadrato distantiae; diminuetur & Gravitatis in eadem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & secundariorum circa Jovem & Saturnum sunt phænomena generis ejusdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versùs centrum Solis, secundariorum versùs centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta versùs Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum à centrīs, quemadmodum vis Lunæ est ut quadratum distantiae à Terræ: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra vicissim in Lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim in secundarios; sic & omnes primarii in Solem, & Sol vicissim in primarios.

Igitur Sol in Planetas universos gravitat, & universi in Solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum Solem unâ cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipsos. Secundarios verò Planetas in Solem gravitare, abunde insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratissimam Theoriam, admirandâ sagacitate patefactam, in Tertio hujus Operis Libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoersum propagari ad ingentes usque distantias, & sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissimè colligi potest ex motu Cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipsum proximè accedunt, ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantum non contingere videantur. Horum Theoriam, ab Astronomis antehac frustra quaesitam, nostro tandem seculo feliciter inventam & per observationes certissimè demonstratam præstantissimo nostro Auctori debemus. Patet igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce verò phænomenis manifestum est & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis suis, respicere Solem, &

VOL. II.

c

esse

esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantum ad corpora Planetarum, in datis distantiiis, & in eodem ferè plano collocata, sed etiam ad Cometæ, in diversissimis cælorum regionibus & in diversissimis distantiiis positos, pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò sequitur, Planetas & Cometæ universos se mutuò trahere, & in se mutuò graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Astronomis non incognitâ, & ab actionibus horum Planetarum in se invicem oriundâ; quin & ex motu illo lentissimo Apfidum, qui suprà memoratus est, quique à causâ consimili proficiscitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum sit, & Terram & Solem & corpora omnia cælestia, quæ Solem comitantur, se mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum suprà de Terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiiis, erunt & harum vires in duplicatâ ratione distantiarum reciprocè: nam ex particulis hæc lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur Philosophis; Effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eadem sunt, easdem esse Causas, & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si Gravititas sit causa descensus lapidis in *Europâ*, quin eadem sit causa descensus in *Americâ*? Si Gravititas mutua fuerit inter lapidem & Terram in *Europâ*; quis negabit mutuam esse in *Americâ*? Si vis attractiva lapidis & Terræ componatur, in *Europâ*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *Americâ*? Si attractio Terræ ad omnia corporum genera, & ad omnes distantias, propagetur in *Europâ*; quidni pariter propagari dicamus in *Americâ*? In hæc Regulâ fundatur omnis Philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possumus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per Observationes & Experimenta: inde verò non nisi per hanc Regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cum gravia sint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Cælisperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omnino dicendum erit, Gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint Extensâ, Mobilia & Impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint Gravia. Corporum Extensio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non nisi per experimenta innotescunt: eodem planè modo Gravititas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, Extensâ sunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, Extensâ esse & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt

(*) Profecto si illud velit Cotesius, Gravitatem naturali quâdam necessitate corporibus omnibus quæ corpora sunt inesse, sicut horum quidque, extendi, moveri posse, penetrari (ut plerique existimant)

sunt Gravia, de quibus observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, Gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensâ esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ Fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est viribus? inter primarias qualitates corporum univerforum vel Gravititas habebit locum; vel Extensio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et Natura Rerum vel rectè explicabitur per corporum Gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum Extensionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem (*).

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid musitare. Gravitatem scilicet Occultum esse quid, perpetuò argutari solent; occultas verò causas procul esse ablegandas à Philosophiâ. His autem facilè respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur, sed his solum quarum occulta est & ficta existentia, nondum verò comprobata. Gravititas ergo non erit occulta causa motuum cælestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem reverà existere. Hi potius ad occultas fugiunt causas; qui nescio quos Vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ & sensibus omnino ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravititas occulta causa dicitur, eoque nomine rejicitur à Philosophiâ, quod causa ipsius Gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuunt absurdi, unde totius tandem Philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent à compositis ad simpliciora; ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes, & quæ ab illis porro pendent, usque dum à causis omnibus vacua fuerit & probè purgata Philosophia.

Sunt qui Gravitatem præter naturam esse dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in Physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa Philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim Gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt, quod tamen dici non potest: vel eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus, atque adeo ex causis Mechanicis, originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur an non & hæc omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura Philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota Physica celestis vel ideo minùs placet, existimant) non posse naturali necessitate, quæ corpora, illis inest, illud vult quod à mente Newtoni alienissimum est. (Vide Præfationem in Editionem Opticæ Secundam. To show that I do not take Gravity for an essential Property of Bodies, I have added one Question concerning its Cause.)

quod

quod cum *Cartesii* dogmatibus pugnare, & vix conciliari posse videatur. His sua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem, quam sibi concedi postulant. *Newtonianam* itaque Philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per phaenomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus Opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut à pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in Philosophia verâ. In Horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso Pondere, vel ab intus concluso Elatere, oriri potest. Quod si oblatum Horologium reverâ sit instructum Pondere; ridebitur qui finget Elatere, & ex hypothesi sic præproperè coniectâ motum indicis explicare fuscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitus perferutari, ut ita motus propositi principium verum exploratum habere possit. Idem vel non absimile feretur iudicium de Philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cælos esse repletos, hanc autem in Vortices indefinentur agi voluerunt. Nam si Phaenomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen Philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cælestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverâ existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum Attractionem habere verum locum in Rerum Naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cælestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, si quis dixerit eosdem motus per Vortices explicari debere, etiam si id fieri posse vel maximè concesserimus. Non autem concedimus. Nequeunt enim ullo pacto Phaenomena per Vortices explicari; quod ab Auctore nostro abunde quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porro commentis ornando, infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eandem velocitate, eandemque cursûs determinatione moveri, & eandem habere densitatem, vel eandem vim inertiae pro mole materiae. Constat verò Planetas & Cometas, dum versantur in iisdem regionibus cælorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessario itaque sequitur, ut Fluidi cælestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias à Sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas, cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut transire possint Planetæ; aliâ, ut transire possint Cometæ. Quod cum explicari nequeat, vel fatendum erit, universa corpora cælestia non deferri à materiâ vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed à pluribus, qui ab invicem diversi sunt, idemque spatium Soli circumjectum pervadant.

Si

IN EDITIONEM SECUNDAM.

xxi

Si plures Vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuo penetrare, motibusque diversis revolvî possint; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summe regulares, & peraguntur in Sectionibus Conicis nunc valde eccentricis, nunc ad Circulorum proximè formam accedentibus; iure quærendum erit, quâ fieri possit, ut idem integri conserventur, nec ab actionibus materiæ occurrentis per tot secula quicquam perturbentur. Sane si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficilius explicantur, quàm veri illi motus Planetarum & Cometarum; frustra mihi videntur in Philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectui suo simplicior. Concessâ fabularum licentiâ, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmosphæris, adinstar Telluris nostræ; quæ quidem hypothesi rationi magis consentanea videbitur, quàm hypothesi Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmosphæras, ex naturâ suâ, circa Solem moveri & Sectiones conicas describere; qui sane motus multo facilius concipi potest, quàm consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique Planetas ipsos & Cometas circa Solem deferri ab Atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum cælestium causas, triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similis, quàm hypothesi Atmosphærarum hypothesi Vorticum.

Docuit *Galileus*, lapidis projecti, & in Parabolâ moti, deflexionem à cursu rectilineo oriri à Gravitate lapidis in Terram, ab occultâ scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris, Philosophus causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiâ quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus, quæ proximè contingunt Telluris superficiem. Hanc autem materiâ, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas describere contendet. Deinde verò lapidis deflexionem pulchrè sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquit, in Fluidò illo subtili natat, & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unâ semitam describere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabolâ moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce Philosophi ingenium, ex causis Mechanicis, materiâ scilicet & motu, phaenomena naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducens? Quis verò non subfannabit bonum illum *Galileum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è Philosophiâ feliciter exclusas, denuo revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summe regulares, & easdem leges cum Planetarum motibus observant. Movenitur in orbibus Conicis; hi orbis sunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cælorum partes, & Planetarum regiones liberrimè pertransiunt, & sæpe contra signorum ordinem incedunt. Hæc phaenomena certissimè confirmantur ex Observationibus Astronomicis: & per Vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus Planetarum consistere possunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus è cælis amoveatur.

VOL. II.

d

Si

Si enim Planetæ circum Solem à Vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque Planetam, ejusdem densitatis erunt ac Planeta; uti suprà dictum est. Itaque materia illa omnis, quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus densitatem: quæ verò jacet intra orbem magnum atque orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minus densæ centrum occupare, magis densæ longius à centro abire. Cum enim Planetarum tempora periodica sint in ratione multiplicatâ distantiarum à Sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minus densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina Fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut Fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omnino dicendum est, densiores vorticis partes, majore vi centrifugâ, petere supremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, densitatem habebit, atque adeo vim inertiae, pro mole materiae, quæ non minor erit quàm densitas & vis inertiae Telluris: inde verò Cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valdè admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse merito videatur. Constat autem ex motu Cometarum prorsus regulari, nullam ipsos resistentiam pati, quæ vel minimum sentiri potest; atque adeo neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiae. Nam resistentia Mediorum oritur vel ab inertia materiae fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sane vix observari potest in Fluidis vulgo notis, nisi valde tenacia fuerint adinstar Olei & Mellis. Resistentia quæ sentitur in Aëre, Aquâ, Hydrargyro, & hujusmodi Fluidis non tenacibus, ferè tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente Fluidi densitate vel vi inertiae, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissimè demonstratum est ab Auctore nostro in peregregiâ Resistentiarum Theoriâ, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hæc secundâ vice, & per Experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus verò communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut Fluidi densitas; ergo retardatio, seu Resistentia, erit ut eadem Fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi à Fluido, ad partes corporis posticas recurrente, restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio Fluidi in

in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in Fluidum ad partes anticas; hoc est, nisi velocitas relativa, quâ Fluidum irrui in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irrui in Fluidum; id est, nisi velocitas absoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit, quàm velocitas absoluta Fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest Fluidorum resistentia, quæ oritur ex eorundem densitate & vi inertiae. Itaque concludendum erit; Fluidi caelestis nullam esse vim inertiae, cum nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cum nulla sit vis inertiae: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis, vel pluribus, inducatur, cum nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omnino efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento plane destituitur, quæque Naturæ Rerum explicandæ ne minimum quidem inservit, ineptissimam vocare liceat, & Philosopho prorsus indignam. Qui caelos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nullâ fecerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quòd si aliqui sint adeo usque dediti materiae, ut spatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quò tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi possit ab Æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex Cometarum phaenomenis, nullam esse hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa Mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in faeces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui fornicant Fato universa regi, non Providentiâ; materiam ex necessitate suâ semper & ubique extitisse, infinitam esse & aeternam. Quibus positis, erit etiam undique uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam si necessario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinatâ aliquâ velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversâ velocitate; in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrimâ formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa sane sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui veræ Physicæ principia legesque rerum, solâ mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere Mundum ex necessitate fuisse, Legesque

propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo Naturæ, se tamen, homuncionem, misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minùs grata sint futura. His vel Miracula vel Qualitates Occultæ dicantur, quæ displicent: verùm nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere Philosophiam in Atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda Philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro illustrissimi nostri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertinentis, ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, merito admirantur & suspiciunt quicumque paulo profundius in hisce rebus versati sunt. Clausuris ergo reſeratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis Mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit, & penitus perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, Rex Alphonsus vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in eâ desideraret. Itaque Naturæ majestatem propius jam licet intueri, & dulcissimâ contemplatione frui; Conditorum verò ac Dominum universorum impensius colere & venerari, qui fructus est Philosophiæ multo uberrimus. Cæcumesse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: infanum, qui proſpiteri nolit.

Extabit igitur eximium NEWTONI Opus adversus Atheorum impetum munitissimum præsidium: neque enim alicunde felicius, quàm ex hac pharetrâ, contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis concionibus anglicè latinèque editis, primus egregiè demonstravit Vir in omni Literarum genere præclarus, idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEY, Sæculi sui & Academiae nostræ magnum ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* Magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cum à longo tempore celeberrimi Auctoris amicitia intimâ frueretur (quâ etiam apud Posteris censeri non minoris æstimat, quàm propriis scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) amici simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris Editionis rarissima admodum & immani pretio cœmenda superessent; suavit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique Virum præstantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem,

nem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur. Mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quàm posset emendatè id fieri curarem.

*Cambrigiæ,
Maii 12, 1713.*

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Astronomiæ & Philosophiæ Experimentalis
Professor Plumianus.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM TERTIAM.

IN Editione hâcce Tertiâ, quàm Henricus Pemberton, M. D. vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in Libro Secundo de Resistentiâ Mediorum paulò fusiùs explicantur quàm antea, & adduntur Experimenta nova de Resistentiâ gravium quæ cadunt in Aëre. In Libro Tertio argumentum, quo Lunam in orbe suo per Gravitationem retineri probatur, paulo fusiùs exponitur: & novæ adduntur Observationes de proportionem diametrorum Jovis ad invicem à D. Poundio factæ. Adduntur etiam observationes aliquot Cometæ illius qui anno 1680 apparuit, à D. Kirk mense Novembri in Germaniâ habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constet quàm propè orbes Parabolici motibus Cometarum respondent. Et orbita Cometæ illius, computante Halleio, paulo accuratius determinatur quàm antea, idque in Ellipsi. Et ostenditur Cometam in hâc orbitâ Ellipticâ, per novem cælorum signa, non minus accuratè cursum peregisse, quàm solent Planetæ in orbitis Ellipticis per Astronomiam definitis moveri. Orbis etiam Cometæ qui anno 1723 apparuit, à D. Bradleio Astronomiæ apud Oxoniensēs Professore computatus adjicitur.

Dabam Londini,
Jan. 12, 1725-6.

I S. NEWTON.

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI PRIMI PRINCIPIORUM.

	Definitiones.	Pag. I
	Axiomata, sive Leges Motus.	13
SECT. I.	De Methodo Rationum Primarum & Ultimarum.	30
SECT. II.	De inventione Virium Centripetarum.	41
SECT. III.	De motu corporum in Conicis Sectionibus eccentricis.	68
SECT. IV.	De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato.	87
SECT. V.	De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur.	94
SECT. VI.	De inventione Motuum in Orbibus datis.	124
SECT. VII.	De corporum Ascensu & Descensu rectilineo.	139
SECT. VIII.	De inventione Orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.	153
SECT. IX.	De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Asidum.	161
SECT. X.	De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproco.	175
SECT. XI.	De Motu corporum viribus centripetis se mutuo persequentium.	190
SECT. XII.	De corporum Sphæricorum Viribus Attractivis.	219
SECT. XIII.	De corporum non Sphæricorum Viribus Attractivis.	238
SECT. XIV.	De Motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.	254

ARGU-

ARGU-

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI SECUNDI PRINCIPIORUM.

SECT. I.	<i>De Motu corporum quibus resistitur in ratione Velocitatis.</i>	Pag. 262
SECT. II.	<i>De Motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatis.</i>	273
SECT. III.	<i>De Motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.</i>	306
SECT. IV.	<i>De corporum Circulari motu in Mediis resistentibus.</i>	319
SECT. V.	<i>De densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostaticâ.</i>	333
SECT. VI.	<i>De Motu & Resistentiâ corporum Funependulorum.</i>	348
SECT. VII.	<i>De Motu Fluidorum & Resistentiâ Projectilium.</i>	381
SECT. VIII.	<i>De Motu per Fluida propagato.</i>	431
SECT. IX.	<i>De Motu Circulari Fluidorum.</i>	447

PHILO-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim.

AER densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato, fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de nive & pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quasunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium liberè pervadentis, hîc nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine Corporis, vel Massæ, in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque
 Vol. II. A pondus :

DEFINITIO-
NES. pondus : nam ponderi proportionalem esse reperi per experimen-
ta pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

DEFINITIO II.

*Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate
materiae conjunctim.*

Motus totius est summa motuum in partibus singulis ; ideoque
in corpore duplo majore, æquali cum velocitate, duplus est, &
duplâ cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III.

*Materiae vis insita est potentia resistendi, quâ corpus unumquodque,
quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel mo-
vendi uniformiter in directum.*

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quic-
quam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam
materiae fit, ut corpus omne de statu suo, vel quiescendi, vel mo-
vendi, difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine fig-
nificantissimo vis inertiae dici possit. Exercet verò corpus hanc
vim solummodo in mutatione statûs sui per vim aliam, in se im-
pressam, factâ ; estque exercitium illud sub diverso respectu & Re-
sistentia & Impetus : Resistentia, quatenus corpus ad conservan-
dum statum suum reluctatur vi impressæ ; Impetus, quatenus cor-
pus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur sta-
tum obstaculi illius mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus
& impetum moventibus tribuit : sed motus & quies, uti vulgo
concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem ; neque
semper verè quiescunt, quæ vulgo tanquam quiescentia spec-
tantur.

DEFINITIO IV.

*Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum
vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

Consistit hæc vis in actione solâ, neque post actionem perma-
net

net in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per
solam vim inertiae. Est autem vis impressa diversarum originum,
ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripetâ.

DEFINITIO V.

*Vis centripeta est, quâ corpora versus punctum aliquod, tanquam
ad centrum, undique trabuntur, impelluntur, vel utcumque
tendunt.*

Hujus generis est gravitas, quâ corpora tendunt ad centrum ter-
ræ ; vis magnetica, quâ ferrum petit magnetem ; & vis illa,
quæcunque fit, quâ planetæ perpetuò retrahuntur à motibus rec-
tilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in fundâ
circumactus, à circumagente manu abire conatur ; & conatu suo
fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur ; & , quam-
primum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ
funda lapidem in manum perpetuò retrahit, & in orbe retinet,
quoniam in manum, ceu orbis centrum, dirigitur, Centripetam
appello. Et par est ratio corporum omnium, quæ in gyrum a-
guntur. Conantur ea omnia à centris orbium recedere ; & nisi
adsit vis aliqua conatui isti contraria, quâ cohibeantur & in or-
bibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt
in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi gravitatis
destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in lineâ rectâ abiret
in cœlos ; idque uniformi cum motu, si modo aëris resistentia
tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur à cursu rectilineo, &
in terram perpetuò flectitur ; idque magis vel minus pro gravi-
tate suâ & velocitate motûs. Quo minor fuerit ejus gravitas pro
quantitate materiae, vel major velocitas quâcum projicitur, eo mi-
nus deviahit à cursu rectilineo & longius perget. Si globus plum-
beus, datâ cum velocitate secundum lineam horizontalem, à
montis alicujus vertice, vi pulveris tormentarii projectus, perge-
ret in lineâ curvâ ad distantiam duorum milliarum, priusquam
in terram decideret : hic duplâ cum velocitate quasi duplo lon-
gius pergeret, & decuplâ cum velocitate quasi decuplo longius :
si modò aëris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem au-
geri posset pro lubitu distantia, in quam projiceretur, & minui
curvatura

DEFINITIO
NES.

curvatura lineæ, quam describeret; ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem, vel triginta, vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret; vel denique ut in cœlos abiret, & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eâdem ratione, quâ projectile vi gravitatis in orbem flecti posset, & terram totam circuire; potest & luna, vel vi gravitatis, si modò gravis sit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper à cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & sine tali vi luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si iusto minor esset, non satis flecteret lunam de cursu rectilineo: si iusto minor, plus satis flecteret, ac de orbe terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit iustæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri possit; & vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus, è dato quovis loco datâ cum velocitate egressum, à datâ vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, Absoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficaciâ causæ eam propagantis à centro per regiones in circuitu.

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intensiōe virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantis à globo terræ; in æqualibus autem distantis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia

(gravia an levia, magna an parva) sublatâ aëris resistentiâ, æqualiter accelerat.

DEFINITIO
NES.

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc quantitas est corporis totius *Centripetentia*, seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, quâ descensus corporis impediri potest.

Hæc virium quantitates, brevitatis gratiâ, nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratiâ referre ad corpora centrum petentia, ad corporum loca, & ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causâ aliquâ præditum, sine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est magnes in centro vis magneticæ, vel terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus: nam virium causas & sedes phyficas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motûs ex celeritate & ex quantitate materiæ; & vis motrix, ex vi acceleratrice & ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix, seu vis gravitans, in corporibus universis eadem est, gravitas motrix, seu pondus, est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi

DEFINITIO- NES. gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis, duplo vel triplo minoris, erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulsus, vel propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuo promiscuè usurpo; has vires non physicè sed mathematicè tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis, causamve aut rationem physicam, alicubi definire; vel centris (quæ sunt puncta mathematica) vires verè & physicè tribuere; si fortè aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerò.

Scholium.

Haftenus voces minùs notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, Spatium, Locus & Motus, sunt omnibus notissima. Notandum tamen, quòd vulgus quantitates hæc non aliter quàm ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in Absolutas & Relativas, Veras & Apparentes, Mathematicas & Vulgares distinguere.

I. Tempus Absolutum, verum, & mathematicum, in se & naturâ suâ, sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare est sensibilis & externa quævis durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur, ut hora, dies, mensis, annus.

II. Spatium Absolutum, naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, semper manet simile & immobile: Relativum est Spatii hujus mensura, seu dimensio quælibet mobilis, quæ à sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & à vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aërii vel cœlestis definita per situm suum ad terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si terra, verbi gratiâ, moveatur, spatium aëris nostri, quod relativè & respectu terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam aër transit, nunc alia pars ejus; & sic absolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat; estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam, spatii; non situs corporis, vel superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; situs verò propriè loquendo quantitatem non habent, neque tam sunt loca quàm affectiones locorum. Motus totius idem est cum summâ motuum partium; hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summâ translationum partium de locis suis; ideoque locus totius idem est cum summâ locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum; Relativus, de relativo in relativum. Sic in navi, quæ velis passis fertur, relativus corporis locus est navigii regio illa, in quâ corpus versatur; seu cavitatis totius pars illa, quam corpus implet, quæque adeo movetur unâ cum navi: & quies relativa est permanens corporis in eadem illâ navis regione, vel parte cavitatis. At quies vera est permanens corporis in eadem parte spatii illius immoti, in quâ navis ipsa unâ cum cavitare suâ & contentis universis, movetur. Unde si terra verè quiescat, corpus, quod relativè quiescit in navi, movebitur verè & absolutè eâ cum velocitate, quâ navis movetur in terrâ. Sin terra etiam moveatur; orietur verus & absolutus corporis motus, partim ex terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in terrâ. Et si corpus etiam moveatur relativè in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus, tum navis in terrâ, tum corporis in navi: & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terrâ. Ut si terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; nauta autem ambulet in navi orientem versus cum velocitatis parte unâ: movebitur nauta verè & absolutè in spatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terrâ occidentem versus cum velocitatis partibus novem.

Tempus Absolutum à Relativo distinguitur in Astronomiâ per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales,

DEFINITIO-
NES.

les, qui vulgo tanquam æquales pro mensurâ temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis, quo tempus accuratè mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum, five motus sint celeres, five tardii, five nulli: proinde hæc à mensuris suis sensibilibus meritò distinguitur, & ex iisdem colligitur per æquationem astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis phænomenis necessitas, tum per experimentum horologii oscillatorii, tum etiam per eclipses satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium temporis est immutabilis, sic etiam ordo partium spatii. Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipſis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi loca. In tempore quoad ordinem successionis, in spatio quoad ordinem sitûs, locantur universa. De illorum essentiâ est, ut sint loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur Absoluta Loca; & solæ translationes de his locis sunt Absoluti Motus.

Verum quoniam hæc Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantibus rerum à corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur; nec incommodè in rebus humanis: in philosophicis autem abstrahendum est à sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum reverâ quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguantur autem quies & motus absoluti & relativi ab invicem per proprietates suas & causas & effectus. Quietis proprietas est, quòd corpora verè quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longè ultrà, quiescat absolutè; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad lon-

longinquum illud datam positionem fervet necne; quies vera ex DEFINITIONES.
horum situ inter se definiri nequit.

Motûs proprietas est, quòd partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motûs, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam verè quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublatâ illa translatione, non verè quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de viciniâ corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quòd moto loco movetur una locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo navtæ suprâ memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia suprâ retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest, sine viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora, ad quæ fit relatio; ut iis ceden-

DEFINITIO- NES. tibus mutetur relatio illa, in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus à viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eadem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur, ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus, ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minimè consistit.

Effectus, quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nudè relativo, hæ vires nullæ sunt; in vero autem & absoluto, majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat fitula à filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum à contorsione admodum rigescat, dein impleatur aquâ, & unâ cum aquâ quiescat; tum vi aliquâ subitanè agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam vas, vi in aquam paulatim impressâ, effecit ut hæc quoque sensibilibiter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim à medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) & incitatioe semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo quiescat in eodem relativè. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Postea verò, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circulare verum perpetuò crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relativè. Quare conatus iste non pendet à translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales translationes

lationes definiri nequit. Unicus est corporis cujunque revolvētis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativus, pro variis relationibus ad externa, innumeri sunt; & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in systemate eorum, qui cœlos nostros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, & planetas secum deferre; singulæ cœlorum partes, & planetæ, qui relativè quidem in cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quàm fit in verè quiescentibus) unâque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolvētium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus, loco quantitatum mensurarum, utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; & sermo erit insolens & purè mathematicus, si quantitates mensuratæ hîc intelligantur. Proinde vim inferunt sacris literis, qui voces hæc de quantitativis mensuratis ibi interpretantur. Neque minùs contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est; propterea quòd partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta defumi possunt, partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiae; partim ex viribus, quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret, ex tensione fili, conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies, ad motum circulare augendum vel minuendum, simul imprimerentur; innotesceret, ex auctâ

DEFINITIO- vel diminutâ fili tensione, augmentum vel decrementum motûs ;
NES.
& inde tandem inveniri possent facies globorum, in quas vires imprimi deberent, ut motus maximè augetur; id est, facies positivæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motûs. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motûs hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile, quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua, datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus cœlorum: sciri quidem non posset, ex relativâ globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, & deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse, quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum, ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motûs colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contrâ ex motibus, seu veris seu apparentibus, eorum causas & effectus, docebitur fusiùs in sequentibus. Hunc enim in finem tractatum sequentem composui.

A X I O M A T A,

A X I O M A T A,

S I V E

L E G E S M O T U S.

L E X I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud à viribus impressis cogitur statum suum mutare.

PROJECTILIA perseverant in motibus suis, nisi quatenus à resistentiâ aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese à motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem planetarum & cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares, in spatiis minùs resistentibus factos, conservant diutius.

I.

L E X

AXIOMATA, tiones versùs contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis subducetur motui corporis insequentis, sic ut summa maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphæricum A sit triplo majus corpore sphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B sequatur in eadem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius A sit ad motum ipsius B, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus A lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem; ideoque perget corpus A post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & B cum partibus septem vel sex vel quinque; existente semper summâ partium sexdecim, ut priùs. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim; corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur, vel cum unâ parte progrediatur, amissis partibus novem; vel quiescet, amisso motu suo progressivo partium decem; vel cum unâ parte regrediatur, amisso motu suo & (ut ita dicam) unâ parte amplius; vel regrediatur, cum partibus duabus, ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium $15+1$ vel $16+0$, & differentiæ contrariorum $17-1$, & $18-2$, semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergunt, inveniatur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus possit esse ad motum antè. Ut in casu ultimo, ubi corporis A motus erat partium sex ante reflexionem, & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; inveniatur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quòd si corpora, vel non sphærica, vel diversis in rectis mo-

ventia

ventia incidant in se mutuò obliquè, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus: dein corporis utriusque motus (per Corol. II.) distinguendus est in duos; unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quòd corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt, sic ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ priùs. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

COROL. IV.

Commune gravitatis centrum corporum duorum, vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuò agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ. Hoc postea in lemmate XXIII ejusque corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quocunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd linea horum corporum centra, in rectis uniformiter progredientia, jungens dividitur, ab hoc centro communi, in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum

AXIOMATA,
SIVE

rum & centri corporis tertii, in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuscvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione; & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum, quæ actionibus in se invicem, aliisque omnibus in se extrinsecus impressis, omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantie centrorum utriusque à communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud, vel ad eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuò agentium commune gravitatis centrum, ob actionem illam, nullatenus mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur, à communi corporum omnium centro, in partes summis totalibus corporum, quorum sunt centra, reciproce proportionales; ideoque centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est, quod commune illud omnium centrum, ob actiones binorum corporum inter se, nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se, vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; & propterea communi omnium centro mutationem, in statu motûs ejus vel quietis, nunquam inducunt. Quare eum centrum illud, ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in rectâ aliquâ progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi à viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur

turbetur de hoc statu. Est igitur systematis corporum plurium ^{LEGES} lex eadem, quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu ^{MOTUS.} motûs vel quietis. Motus enim progressivus, seu corporis solitarii, seu systematis corporum, ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

C O R O L. V.

Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.

Nam differentie motuum tendentium ad eandem partem, & summe tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus, quibus corpora se mutuò feriunt. Ergo per legem II æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se, in uno casu, æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

C O R O L. VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & à viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

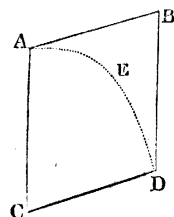
Nam vires illæ æqualiter (pro quantitativis movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II, ideoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium.

Hactenus principia tradidi à Mathematicis recepta, & experimentiâ multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria duo prima *Galileus* invenit descensum gravium esse in duplicatâ ratione

AXIOMATA
HVE

ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabolâ; conspirante experientiâ, nisi quatenus motus illi per aëris resistentiâ aliquantulum retardantur. Corpore cadente, gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo, imprimit vires æquales in corpus illud, & velocitates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit, & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocitates & tempora conjunctim; id est, in duplicatâ ratione temporum. Et corpore sursum projecto, gravitas uniformis vires imprimit, & velocitates aufert, temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim; seu in duplicatâ ratione velocitatum. Et corporis, secundum rectam quamvis projecti, motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur.



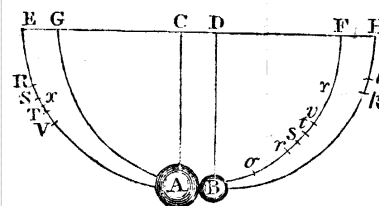
Ut si corpus A motu solo projectionis, dato tempore, describere posset rectam AB; & motu solo cadendi, eodem tempore, describere posset altitudinem AC: compleatur parallelogrammum ABDC, & corpus illud, motu composito, reperietur in fine temporis in loco D; & curva linea AED, quam corpus illud describet, erit Parabola, quam recta AB tangit in A, & cujus ordinata BD est ut ABq. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata de temporibus

(^d) Sub finem Anni 1668. Vide Acta Philosophica.

(^e) Hanc doctrinam Wallisius, brevibus primùm scriptis cum Societate Regiâ communicatam, postea in libro suo *De Motu*, anno 1671 in lucem edito, capite decimo tertio, fuscè exposuit. Hugenus autem eleganter eandem & accuratè pertractavit in libro *de Motu Corporum ex percussione*, quem post mortem auctoris, anno 1703, cum Dioptricâ ac scriptis quibusdam aliis, in lucem emisserunt viri docti Burcherus de Volder & Bern Fullenius, quibus id negotii Hugenus testamento demandaverat.

(^f) NEMPE cùm rv fit retardatio tota, quam motus corporis penduli, ex aëris renixu, oscillatione geminâ subierit; retardatio, quam vis eadem renitentis aëris, simplicis oscillationis spatio, corporis motui intulerit, hæc illius rv semissis erit. Sed simplicis illius oscillationis initium neque à puncto altissimo r sumendum est, unde corpus pendulum primùm demissum est, neque ab infimo v, quod post unam oscillationem redeundo illud attigerit; sed à puncto aliquo duorum r, v intermedio: quia majorem motus retardationem, arcum oscillationis primæ ampliorem quàm angustioiorem finieris, si arcum st, quartæ parti arcus rv æqualem, in medio arcus rv ita collocaveris, ut punctum arcus st medium ipsius rv medium occupet; unde ea fiet arcus rr, in punctis s, t diviso, quam Newtonus fieri iussit. Arcum enim utrumque rv, st punctum x medium dividat: et

bus oscillantium pendulorum, suffragante horologiorum experientia quotidiana. Ex his iisdem, & lege tertiâ, *Christophorus Wrennus* eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *Christianus Hugenus*, ætatis superioris Geometrarum facile principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum seorsim invenerunt, & eodem fere tempore (^d) cum *Societate Regiâ* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hugenus* inventum prodiderunt (^e). Sed & veritas comprobata est à *Wrenno*, coram *Regiâ Societate*, per experimentum pendulorum: quod etiam *Clarissimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amissim congruat, habenda est ratio, cum resistentiâ aëris, tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora sphaerica A, B filis parallelis & æqualibus AC, BD, à centris C, D. His centris &



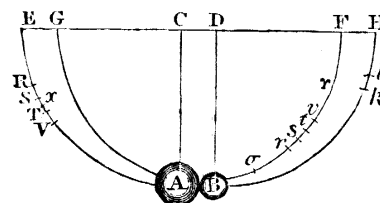
intervallis describantur semicirculi EAF, GBH, radiis CA, DB bisecti. Trahatur corpus A ad arcus EAF punctum quodvis R, & subducto corpore B, demittatur inde; redeatque, post unam oscillationem, ad punctum v.

Est rv retardatio ex resistentiâ aëris (^f). Hujus rv fiat st pars quarta sita in medio; ita scilicet ut rs & tv æquantur, sitque rs ad st ut 3 ad 2. Et ista st exhibebit retardationem in descensu ab s ad A quàm proximè. Restituatur corpus B in lo-

et sit t punctum arcus AF, quod primâ oscillatione, corpus pendulum, à puncto r demissum attigerit. Arcus tres RA, AT, AV, erunt quàm proximè arithmetici: arcus autem tres RA, AX, AV arithmetici: arcus igitur AX, AT inter se æquales erunt, cùm uterque duorum RA, AV simul sumptorum semissis sit. Præterea cùm RA, AV simul sumpti duplo arcus AT æquales sint, si addatur illis duplus arcus AT, efficietur quadruplus arcus AT. Ergo arcus AT vel illi æqualis AX, duorum RT, TV simul sumptorum pars quarta erit. Duorum igitur RT, TV, quos oscillatione geminâ corpus pendulum, ab r demissum, absolverit, horum inquam parte quartâ arcus SA paulo major, arcus TA paulo minor erit. Corpus igitur pendulum, à puncto s demissum, motus retardationem, per arcum SA descendendo, parte quartâ retardationis rv paulo majorem subierit; & per arcum ipso TA angustioiorem ad contrarias partes ascendendo, ejusdem rv parte quartâ tantundem fere minorem. Unde spatio oscillationis integræ, à puncto illo s inchoatæ, dimidium ipsius rv retardationem corpus pendulum subierit. Et quanquam hujus dimidiâ, sive parte quartâ totius rv, major sit pars illa quæ lapsu per arcum SA impressa fuerit, ut minor sit corporis penduli in loco A velocitas quàm si de loco t per inane illud decidisset, tantilla tamen differentia erit, ut nullius prorsus sit momenti. Q. E. D.

AXIOMATA, cum suum. Cadat corpus A de puncto s, & velocitas ejus in loco reflexionis A, sine errore sensibili, tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco T. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcûs TA. Nam velocitatem penduli, in puncto infimo, esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad locum s, & corpus B ad locum k. Tollatur corpus B; & inveniatur locus v, à quo si corpus A demittatur, & post unam oscillationem redeat ad locum r, sit st pars quarta ipsius rv sita in medio; ita videlicet ut rs & tv æquantur: & per chordam arcûs TA exponatur velocitas, quam corpus A proximè post reflexionem habuit in loco A. Nam t erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A, sublatâ aeris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus k, ad quem corpus B ascendit, & inveniendus locus l, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti effemus. Tandem ducendum erit corpus A (ut ita dicam) in chordam arcûs TA, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco A, proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs tA, ut habeatur motus ejus in loco A proximè post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcûs B/, ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quàm æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper, sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuò directè occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatas, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales. Ut si corpus A incidebat in corpus B quiescens cum novem partibus motûs, & amissis septem partibus pergebat, post reflexionem, cum duabus; corpus B resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obvi-

obviabant, A cum duodecim partibus & B cum sex, & redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ detractiōe partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius A subducantur partes duodecim, & restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & sic de motu corporis B, partium sex, subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quòd si corpora ibant ad eandem plagam, A velocius cum partibus quatuordecim, & B tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergebat A



cum quinque partibus; pergebat B cum quatuordecim, factâ translatione partium novem de A in B. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motûs, quæ ex summâ motuum conspirantium, & differentiâ contrariorum, colligebatur.

Nam errorem digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula fatis accuratè. Difficile erat, tum pendula simul demittere, sic ut corpora in se mutuò impingerent in loco infimo AB; tum loca s, k notare, ad quæ corpora ascende- bant post concursum. Sed & in ipsis corporibus pendulis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel absolutè dura esse, vel saltem perfectè elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; addo, quòd experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æquè ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda est, debet solummodo reflexio minui, in certâ proportionem pro quantitate vis elasticæ. In theoriâ Wrenni & Hugenii corpora absolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congressûs. Certius id affirmabitur de perfectè elasticis (g). In imperfectè elasticis veloci-

tas

(*) Hicce credo Newtonus insinuare voluit, aliud esse corporum duritiem, aliud vim resiliendi; Vol. II. D

AXIOMATA,
SIVE

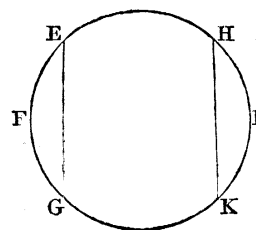
tas reditûs minuenda est simul cum vi elasticâ; propterea quòd vis illa (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur) certa ac determinata sit, quantum sentio, faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ sit ad relativam velocitatem concursûs in datâ ratione ^(b). Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter constrictâ sic tentavi. Primum demittendo pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ esset ad velocitatem relativam concursûs ut 5 ad 9 circiter. Eâdem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia, quoad ictus & reflexiones, per theoriam comprobata est, quæ cum experienciâ planè congruit.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibuscvis A, B se mutuò trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur versus corpus alterum B, quàm illud alterum B in prius A, obstaculum magis urgebitur pressione corporis A, quàm pressione corporis B; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum & obstaculi moveatur in directum in partes versus B, motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debet systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum; proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vasculis propriis

ac propterea quæ Wrennus & Hugenius de duris pronuntiârunt, cum eadem illi resiliencia intellexerent quæ dura, de iis potius affirmanda esse, quæ maximâ vi resiliendi prædita sint. Nimium Newtonus cum Wallisio id *Durum* appellat "quod ictui nequaquam cedit: Id *Molle*, quod ictui ita cedit, ut pristinam figuram amittat; ut Lutum, Cera, Plumbum, aliæque similia quæ ictu deformantur: Id *Elasticum*, quod utut ictui aliquantum cedat, se tamen in pristinam formam sœpè marte restituit" (Wallis, De Motu, Cap. XI. Prop. 1. Schol.) Si igitur id sit durum, quod ictui nequaquam cedat, hoc est ejus partes nullâ vi impressâ aut flecti aut separari possint; certe potentiâ illâ insitâ, quâ res, vi subitâ deformatæ, figuris suis restituantur, & inter se collisæ resiliunt;

propriis sese contingentibus seorsim posita, in aquâ stagnante juxta ^{Leges} fluent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis ^{Motus.} utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua est. Secetur terra FI, plano quovis EG, in partes



duas EGF & EGI: & æqualia erunt harum pondera in se mutuò. Nam si plano alio HK, quod priori EG parallelum sit, pars major EGI secetur in partes duas, EGHK & HKI, quarum HKI æqualis sit parti prius abscissæ EFG: manifestum est, quòd pars media EGKH, pondere proprio, in neutram

partium extremarum propendebit; sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, & quiescet. Pars autem extrema HKI toto suo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam EGF; ideoque vis, quâ partium HKI & EGKH summa, EGI, tendit versus partem tertiam EGF, æqualis est ponderi partis HKI, id est ponderi partis tertiæ EGF. Et propterea pondera partium duarum EGI, EGF in se mutuò sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, terra tota, in libero æthere fluitans, ponderi majori cederet; &, ab eo fugiendo, abiret in infinitum.

Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent, quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ: sic, in movendis instrumentis mechanicis, agentia idem pollent, & conatibus contrariis se mutuò sustinent, quorum velocitates, secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ, oscillante librâ, sunt reciproce ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est, pondera, si rectâ ascendunt & descendunt, æquipollent, quæ sunt

unt; hæc, inquam, quod durum est prorsus carebit: adeoque, cum nihil sine causâ fiat, corporum durorum, si concurrerint, nulla videtur posse fieri reflexio. Vide Le Sæur, & Jaquier ad locum.

(b) Fictis utique corporum specie & magnitudine datis. In diversis corporum magnitudinibus, quorum figuræ inter se sint similes; differentia, quibus velocitates relative post congressum abeunt ab eâ quæ antè fuerat, laterum homologorum inter se proportionem servant: sicut suadere existimantur experimenta quædam Rizetti, quæ in Commentariis Academiæ Bononiensis memorantur. Hæc autem fide doctissimorum Patrum Le Sæur & Jaquier ipse refero.

D 2

reciproce

AXIOMATA, SIVE reciprocè ut punctorum, à quibus suspenduntur, distantiae ab axe librae; sin planis obliquis, aliisve admotis obstaculis, impedita ascendunt vel descendunt obliquè; æquipollent, quæ sunt reciprocè ut ascensus & descensus, quatenus facti secundum perpendicularum: idque ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in Trochleâ, seu Polyspasto, vis manûs funem directè trahentis, quæ sit ad pondus, vel directè, vel obliquè ascendens, ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manûs funem trahentis, sustinebit pondus. In Horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, si sunt reciprocè ut velocitates partium rotularum, in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. Vis Cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii, eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Vires, quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi, sunt ad vim Mallei in cuneum, ut progressus cunei, secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas facibus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contrà: unde solvitur in omni apertorum instrumentorum genere Problema, *Datum pondus datâ vim movendi*, aliamve datam resistantiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistantis sint reciprocè ut vires; agens resistantiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certè si tanta fit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistantia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quàm ex continuorum, & ab invicem separandorum cohæsione, & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni eâ resistantiâ, vis redundans accelerationem motûs sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterùm Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quàm late pateat quàmque certa sit lex tertia motûs. Nam si æstimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate

conjunctim; & similiter resistantis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis, erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum, & ultimò imprimitur in corpus omne resistens; ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

L E M M A II.

Si in figurâ quâvis $AACE$, rectis Aa , AE & curvâ ace comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque, Ab , Bc , cd , &c. sub basibus AB , BC , CD , &c. æqualibus, & lateribus Bb , Cc , Dd , &c. figura lateri Aa parallelis contenta; & compleantur parallelogramma $akbi$, $bLcm$, $cmdn$, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico, quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta $AKBLCMDd$, circumscripta $Aaibmendoe$, & curvilinea $Aabede$, sunt rationes æqualitatis.

Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum KI , Lm , Mn , Do ; hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum summâ Aa , id est, rectangulum $ABia$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I) figura inscripta & circumscripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. E. D.

L E M M A II.

Eadem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB , BC , CD , &c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum $FAaf$. Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ et figuræ circumscriptæ; at, latitudine suâ AF in infinitam diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum ab , bc , cd , &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

Corol.

D E

MOTU CORPORUM

LIBER PRIMUS.

S E C T I O I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

L E M M A I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propriùs ad invicem accedunt, quàm pro datâ quâvis differentia, fiunt ultimò æquales.

SI negas; fiant ultimò inæquales, & sit earum ultima differentia D . Ergo nequeunt propriùs ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentia D : contra hypothesin ^(a).

(^a) Vide Tom. I. p. 237.

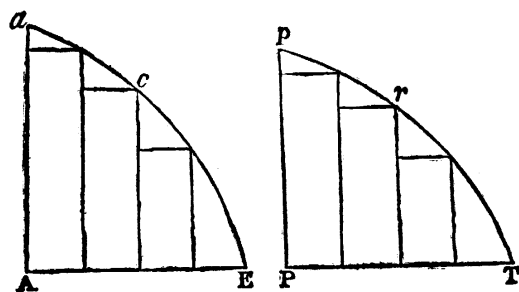
L E M M A

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumscripta, quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros acē), non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

L E M M A IV.

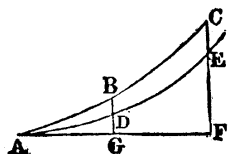
Si in duabus figuris ΔACE , $pprt$, inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus; \odot , ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, singulorum ad singula, sint eadem; dico, quod figuræ duæ ΔACE , $pprt$, sunt ad invicem in eadem illâ ratione.



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore (per lemma III) ad summam priorem, & figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Q. E. D. (b).

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem

(b) *Cor. H. 1.* Si duæ Curvæ (ABC , ADE) axem habeant communem (AF) hujus autem curvæ ordinatæ ad ordinatas alterius datam aliquam rationem gerant, binas utique semper conferendo, quæ ex eodem axis puncto educæ sint; aræ curvarum AFC , AFE , datam ordinarum inter se rationem habebunt. Nempe hoc dico; à puncto G , in axe curvarum, AF , pro lubitu assumpto, educæ ad perpendicularum rectâ GB , quæ curvis duabus, ABC , ADE , illi in puncto B , huic in puncto D , occurrat; si rectis BG , DG , data aliqua ratio intercedat, quæ eadem obtineat à quocunque demum axis puncto ordinata educatur, eadem Aræarum etiam, AFC , AFE , inter ipsas ratio erit.



Cor.

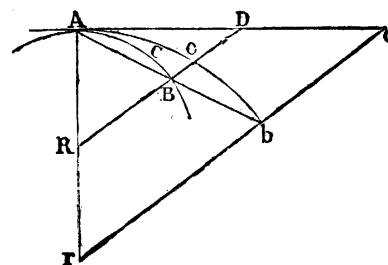
invicem in eadem illâ datâ ratione. Nam si in lemmatis hujus ^{LIBER PRIMUS.} figuris fumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothefin) in ultimâ ratione partis ad partem (c).

L E M M A V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuò respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quàm rectilinea; & aræ sunt in duplicatâ ratione laterum.

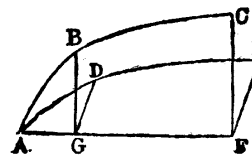
L E M M A VI.

Si arcus quilibet positione datus, ACB , subtendatur chordâ AB , \odot in puncto aliquo A , in medio curvaturæ continuæ (d), tangatur à rectâ, utrinque productâ, AD ; dein puncta A , B ad invicem accedant, \odot coeant; dico, quod angulus BAD , sub chordâ \odot tangente contentus, minuetur in infinitum, \odot ultimò evanescet.



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothefin.

Cor. H. 2. Quod si recta GB non ad perpendicularum, sed cum datâ quâvis ad axem communem AF inclinatione educatur, idem obtinebit.



VOL. II.

Cor. H. 3. Si verò Curvæ duæ ABC , ADE , eo modo ad se mutuò sint affectæ, ut rectæ, GB , GD , à puncto aliquo G in axe communi, AF , ordinatim educæ, datis quidem sed diversis ad axem illam inclinationibus, datam inter se rationem gerant; quæ eadem obtineat, à quocunque demum axis puncto ordinatæ illæ educantur; vel sic etiam aræ $ABCF$, $ADEF$, data quædam ratio intercedet; ea nimirum, quam rectæ à punctis B , D in axe AF ad perpendicularum demissæ inter se habent.

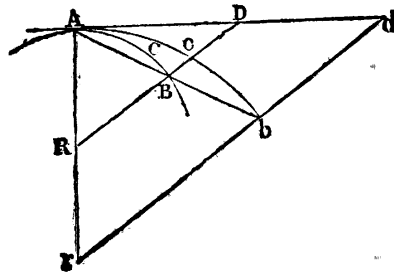
(c) Vide Tom. I. p. 240.

(d) Vide Tom. I. p. 242.

E

L E M M A

Iisdem positis; dico quòd ultima ratio arcûs, chordæ, & tangētis ad invicem est ratio æqualitatis.



Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB & AD ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti BD parallela agatur *bd*. Sitque arcus *acb* semper similis arcui ACB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus *dab*, per lemma superius, evanescet;

ideoque rectæ semper finitæ *ab*, *ad*, & arcus intermedius *acb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius ACB evanescunt, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.

Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela BF, rectam quamvis AF per A transeuntem perpetuò secans in F, hæc BF ultimò ad arcum evanescentem ACB rationem habebit æqualitatis; eo quòd completo parallelogrammo AFDB rationem semper habet æqualitatis ad AD.

Corol. 2. Et si per B & A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG, secantes tangentem AD & ipsius parallellam BF; ratio ultima abscissarum omnium AD, AE, BF, BG, chordæque & arcûs AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

L E M M A VIII.

Si rectæ datæ AR, BR (c) cum arcu ACB, chordâ AB, & tangente AD, triangula tria RAB, RACB, RAD constituunt, dein puncta A, B accedunt ad invicem: dico, quòd ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis. (Vide fig. Lemm. VII.)

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur

(c) Intellige rectam AR positione datam; rectam verò BR cā lege mobilem, ut cum aliā aliāque, positione datā, semper ea parallela maneat.

semper

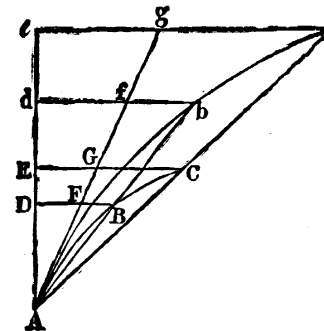
semper AB, AD, AR ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ip-^{LIBER PRIMUS.}sique RD parallela agi *rbd*, & arcui ACB similis semper sit arcus *acb*. Et coeuntibus punctis A, B, angulus *bAd* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *rAb*, *rAcB*, *rAd* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia RAB, RACB, RAD fient ultimò sibi invicem similia & æqualia. Q. E. D.

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

L E M M A IX.

Si recta AE & curva ABC positione datæ se mutuò secant in angulo dato, A, & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, CE, curvæ occurrentes in B, C, dein puncta B, C simul accedant ad punctum A: dico, quòd areæ triangulorum ABD, ACE erunt ultimò ad invicem in duplicatâ ratione laterum.

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur semper AD produci ad puncta longinqua *d* & *e*; ut sint *Ad*, *Ae* ipsis AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis



DB, EC parallelae, quæ occurrant ipsis AB, AC productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *abc* ipsi ABC similis, tum recta *ag*, quæ tangat curvam utramque in A, & secet ordinatam applicatas DB, EC, *db*, *ec* in F, G, *f*, *g*. Tum, manente longitudine *ae*, coeant puncta B, C cum puncto A; & angulo *cag* evanescente, coincident areæ curvilineæ *abd*, *ace* cum rectilineis *afd*, *age*; ideoque (per Lemma v.) erunt in duplicatâ ratione laterum *ad*, *ae*: sed his areis proportionales semper sunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE (f). Ergo & areæ ABD, ACE sunt ultimò in duplicatâ ratione laterum AD, AE. Q. E. D.

(f) Vide Tom. I. p. 244.

L E M M A X.

Spatia, quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur, vel continuò diminuat; sunt, ipso motûs initio, in duplicatâ ratione temporum.

Exponentur tempora per lineas AD, AE, (Vide fig. Lem. IX.) & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areae ABD, ACE his ordinatis descriptæ (8), hoc est, ipso motûs initio (per Lemma IX) in duplicatâ ratione temporum AD, AE. Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc faciliè colligitur, quòd corporum, similes similibus figurarum partes temporibus proportionalibus describentium, errores, qui viribus quibuscvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum à figurarum similibus locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus, sine viribus istis, pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quàm proximè.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus, ad similes figurarum similibus partes similiter applicatis, generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibuscvis, quæ corpora, urgentibus diversis viribus, describunt. Hæc sunt, ipso motûs initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motûs initio, descripta directè, & quadrata temporum inversè.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè, & vires inversè.

S C H O L I U M.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus est, quòd prior augeatur vel diminuitur in

(8) Vide Tom I. p. 244.

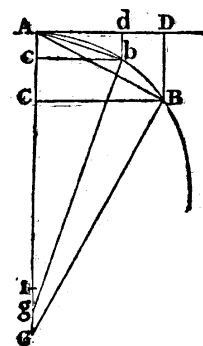
eâdem

eâdem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproâ. Et si ea-^{LIBER PRINUS.}rum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè vel inversè: sensus est, quòd prima augeatur vel diminuitur in ratione, quæ componitur ex rationibus, in quibus aliæ, vel aliarum reciproæ, augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè & c directè & d inversè: sensus est, quòd A augeatur, vel diminuitur, in eâdem ratione cum $B \times c \times \frac{1}{d}$; hoc est, quòd A & $\frac{BC}{d}$ sunt ad invicem in ratione datâ.

L E M M A XI.

Subtensa evanescens anguli contactûs, in Curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs habentibus, est ultimò in ratione duplicatâ subtense arcûs contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, subtensa anguli contactûs ad tangentem perpendicularis BD, subtensa arcûs AB. Huic subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, occurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta d, b, g, sitque J intersectio linearum BG, AG ultimò facta, ubi puncta D, B accedunt usque ad A. Manifestum est, quòd distantia GJ minor esse potest quàm assignata quævis. Est autem (ex naturâ circulorum per puncta ABG, Abg transeuntium) AB quad. æquale AG × BD, & Ab quad. æquale Ag × bd; ideoque ratio AB quad. ad Ab quad. componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam GJ assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest, ut ratio AG ad Ag minùs differat à ratione æqualitatis, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ; ideoque ut ratio AB quad. ad Ab quad. minùs differat à ratione BD ad bd quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima AB quad. ad Ab quad. eadem cum ratione ultimâ BD ad bd. Q. E. D.



Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem

dem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, ideoque eadem ac AB quad. ad Ab quad. Q. E. D.

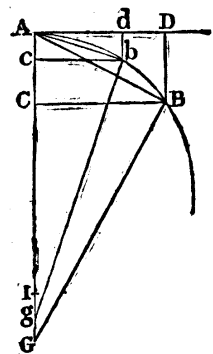
Caf. 3. Et quamvis angulus D non detur, sed recta BD ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli D , d , communi lege constituti, ad æqualitatem semper vergent; & propius accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimò æquales erunt, per Lem. 1; & propterea lineæ BD , bd sunt in eadem ratione ad invicem ac prius. Q. E. D.

Corol. 1. Unde cum tangentes AD , Ad , arcus AB , Ab , & eorum sinus BC , bc fiant ultimò chordis AB , Ab æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimò ut subtenfæ BD , bd .

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimò ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bifecant, & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtenfæ BD , bd ^(b).

Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate describit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB , Adb sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum AD , Ad , inque sesquiplicatâ laterum DB , db ; utpote in compositâ ratione laterum AD & DB , Ad & db existentia.



Sic & triangula ABC , Abc sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum BC , bc . Rationem verò sesquiplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempe ex simplici & subduplicatâ componitur.

Corol. 5. Et quoniam DB , db sunt ultimò parallelæ & in duplicatâ ratione ipsarum AD , Ad ; erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB , Adb (ex naturâ Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB , Adb ; & segmenta AB , Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc segmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium AD , Ad , tum chordarum & arcuum AB , Ab .

^(b) Vide Tom I. p. 248.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactûs nec infinitè majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec infinitè minorem; hoc est, curvaturam ad punctum A , nec infinitè parvam esse, nec infinitè magnam; seu intervallum AJ finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut AD^3 : quo in casu circulus nullus per punctum A , inter tangentem AD & curvam AB , duci potest, proindeque angulus contactûs erit infinitè minor circularibus. Et simili argumento si fiat DB successivè ut AD^4 , AD^5 , AD^6 , AD^7 , &c. habebitur series angulorum contactûs pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Et si fiat DB successivè ut AD^2 , $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactûs, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinitè major, & quilibet posterior infinitè major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series, utrinque in infinitum pergens, angulorum intermediorum inferi, quorum quilibet posterior erit infinitè major minore priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inferatur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{1}{2}}$, $AD^{\frac{1}{3}}$, $AD^{\frac{1}{4}}$, $AD^{\frac{1}{5}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inferi potest series nova angulorum intermediorum, ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem ⁽ⁱ⁾.

Quæ de curvis lineis, deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, faciliè applicantur ad solidorum superficies curvas, & contenta. Præmissi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium, deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minùs geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere;

⁽ⁱ⁾ Vide Keil. Introduct. ad Veram Physicam, Lect. 4. & Newtoni Geometr. Analyt. Cap. VII. §. 23—26.

& propterea limitum illorum demonstrationes, quâ potui brevitate, præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescencia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitarum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima; ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æquè contendendi posset, nullam esse corporis, ad certum locum ubi motus finiatur pervenientis, velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam; ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum, & quâcum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitarum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitarum, non antequam evanescunt, non postea, sed quâcum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quâcum nascuntur. Et summa prima & ultima est quâcum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes, quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitarum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, Problema est verè geometricum, eundem determinare. Geometrica verò omnia, in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis, legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitarum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quàm Euclides de incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verùm hæc objectio falsæ innititur hypothefi. Ultimæ

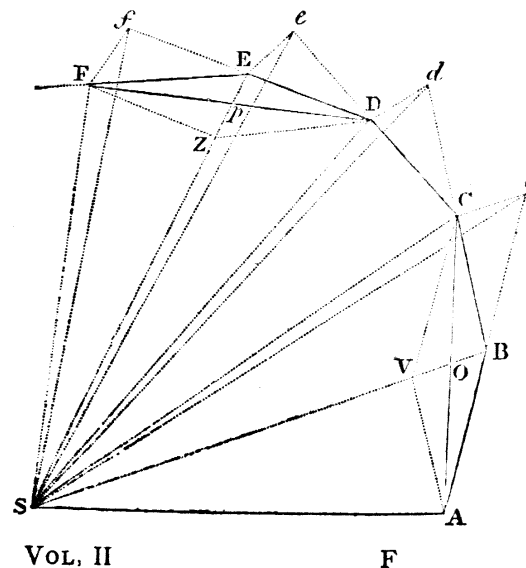
timæ rationes illæ, quibuscum quantitates evanescunt, reverà non sunt rationes quantitarum ultimarum; sed limites, ad quos quantitarum, sine limite decrecentium, rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, nunquam verò transgredi; neque prius attingere, quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis; nec tamen ideò dabuntur quantitates ultimæ, seu maximæ, quarum ista est ratio. In sequentibus igitur, siquando, facili rerum conceptui consulens, dixerò quantitates quàm minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

S E C T I O II.

De inventione virium centripetarum.

P R O P. I. T H E O R. I.

Areas, quas corpora in gyros acta, radiis ad immobile centrum virium ductis, describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.



Dividatur tempus in partes æquales; & primâ temporis parte describat corpus, vi insitâ, rectam AB. Idem secundâ temporis parte, si nil impediret, rectâ pergeret ad c, (per Leg. 1.) describens lineam BC æqualem ipsi AB; adeo ut radiis AS, BS, CS ad centrum actis, constructæ forent æquales

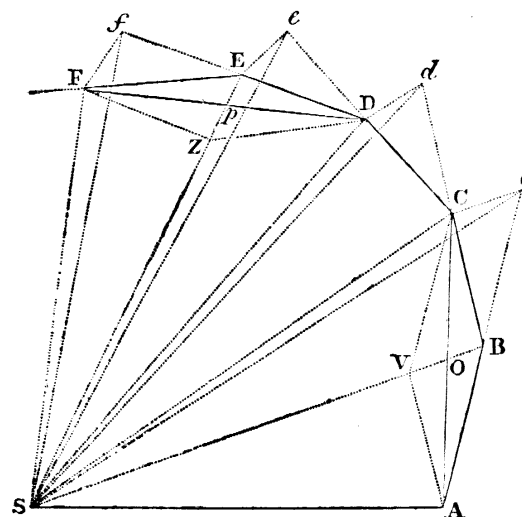
quales areæ ASB , BSC . Verum ubi corpus venit ad B , agat vis centripeta impulsu unico sed magno; efficiatque, ut corpus de rectâ BC declinet, & pergat in rectâ BC . Ipsi BS parallela agatur cc , occurrens BC in c ; & completâ secundâ temporis parte, corpus (per Legum corol. 1.) reperietur in c , in eodem plano cum triangulo ASB . Junge sc ; & triangulum SBC , ob parallelas SB , cc , æquale erit triangulo SBC , atque ideo etiam triangulo SAB . Simili argumento si vis centripeta successive agat in c , d , e , &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD , DE , EF , &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC , & SDE ipsi SCD , & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augetur jam numerus & minuitur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF , (per corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: ideoque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus Curvæ perpetuò retrahitur, aget indefinenter; Areæ verò quævis descriptæ, $SADS$, $SAFS$, temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. Q. E. D.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est, in spatiis non resistentibus, reciprocè ut perpendicularum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. Est enim velocitas in locis illis A , B , C , D , E , ut sunt bases æqualium triangulorum AB , BC , CD , DE , EF ; & hæ bases sunt reciprocè ut perpendiculara in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum, æqualibus temporibus, in spatiis non resistentibus, ab eodem corpore successive descriptorum chordæ, AB , BC , compleantur in parallelogrammum $ABCV$, & hujus diagonalis BV , in eâ positione quam ultimò habet, ubi arcus illi

(^a) AGATUR enim à puncto c recta cv cum bc parallela, quæ cum rectâ sb in v concurrat, & jungatur av . Cum rectæ cc , bv inter se sint parallele, necnon bc , cv ; figura $cvbc$ parallelogramma erit. Erunt igitur bc , cv inter se æquales. (El. I. 34.) Sed ba , bc inter se æquales. Id enim ostensum. Quare cv , ba inter se æquales erunt. Sunt autem inter se parallele; quare cb , av inter se æquales & parallele erunt. (El. I. 33.) Figura igitur $cbaav$ est parallelogramma, sub chordis AB , BC ; & hujus diagonis erit recta bv , quæ vergit ad centrum virium.

(^b) JUNCTÆ



illi in infinitum diminuantur, producantur utrinque; transibit eadem per centrum virium(^a).

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus, in spatiis non resistentibus, descriptorum chordæ AB , BC ac DE , EF compleantur in parallelogramma $ABCV$, $DEFZ$; vires in B & E sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium BV , EZ , ubi arcus isti in infinitum diminuantur.

Nam corporis motus BC & EF componuntur (per Legum corol. 1.) ex motibus BC , BV , & Ef , FZ : atqui BV & EZ , ipsis cc & ff æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B & E ; ideoque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet, in spatiis non resistentibus, à motibus rectilineis retrahuntur, ac detorquentur in orbes curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bifecant, ubi arcus illi in infinitum diminuantur. Nam hæ sagittæ sunt semiffes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio(^b).

Corol. 5. Ideoque vires eadem sunt ad vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas, horizonti perpendiculares, arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore describunt.

(^b) JUNCTÆ ca , df , rectis bv , ez in o , p , occurrant. Arcus per puncta tria a , b , c , atque alius per alia tria, d , e , f æqualibus temporibus conficiuntur. Atque horum chordæ sunt rectæ ac , df quas sagittæ bo , ep medias dividunt; sunt autem sagittæ illæ rectarum bv , ez , semiffes. Nimirum cum rectæ ca , bv ; fd , ez ; parallelogrammorum $cbaav$, $fedz$ sint diagonæ, atque omnis parallelogrammi diagonæ medias se mutuò dividant.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unâ cum centrīs viriū quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

PROP. II. THEOR. II.

Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, & radio ducto ad punctum, vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum.

Caf. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de cursu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quàm minima SAB, SBC, SCD, &c. (*fig. p. 43.*) circa punctum immobile s, temporibus æqualibus, æqualia describere, agit in loco B secundum lineam parallelam ipsi cc (per Prop. xxxix. lib. 1. Elem. & Leg. II.) hoc est, secundum lineam BS (°); & in loco c secundum lineam ipsi dd parallelam, hoc est, secundum lineam sc, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile s. Q. E. D.

Caf. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde est, five quiescat superficies, in quâ corpus describit figuram curvilineam, five moveatur eadem unâ cum corpore, figurâ descriptâ, & puncto suo s uniformiter in directum.

Corol. 1. In spatiis vel mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radorum; sed inde declinant in consequentia, seu versus plagam in quam fit motus, si modò arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur,

(°) NEMPE productâ AB in c, ut sit BC rectæ AB æqualis, junctisque cc, sc; corpus, si in illud nulla egisset vis externa, quo tempore in locum c pervenerit, eo tempore locum c rectæ AC attigisset. Vis autem illa quæ ictu suo, in loco B impresso, id effecerit, ut corpus, quod vis insita movendi per rectam AB, certo quodam temporis puncto, ad locum c appulisset, eo ipso temporis puncto sit in c; hæc inquam vis corpus in B impulerit secundum rectam cum rectâ cc parallelam (per Leg. II. cor. 2.) Sed cum triangula SBA, SBC, inter se æqualia sint (id enim positum erat) et

acceleratur, viriū directiones declinant à concursu radorum versus plagam, in quam fit motus.

Scholium.

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quòd vis illa, quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum s. Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiæ descriptæ perpendiculararem; hæc faciet, ut corpus deflectatur à plano sui motus: sed quantitatem superficiæ descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione viriū negligenda est.

PROP. III. THEOR. III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius, utcumque moti, ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum L, & corpus alterum T: & (per Legum corol. vi.) si vi novâ, quæ æqualis & contraria sit illi quâ corpus alterum T urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum, L, describere circa corpus alterum, T, areas easdem ac prius: vis autem, quâ corpus alterum T urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum, T, sibi met ipsi jam relictum, vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum L, urgente differentiâ viriū, id est, urgente vi reliquâ, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum T describere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia viriū ad corpus illud alterum T ut centrum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus unum, L, radio ad alterum T ducto, describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (five simplici, five ex viribus pluribus juxta legum corollarium secun-

et triangula SBA, SBC inter se æqualia (id enim efficitur per El. I. 38.) erunt triangula SBC, SBC, quibus basis SB communis, inter se æqualia. Rectæ igitur cc, ss inter se parallelæ. (El. I. 39.) Recta igitur ss a puncto s ducta est cum rectâ cc parallela. Vis igitur centripeta in loco B secundum rectam ss corpus impulit. Simili argumento efficitur vim centripetam in loco c secundum rectam cs, secundum ds in loco d, secundum es in e, & in omni Curvæ puncto secundum rectam à puncto illo versus centrum viriū ductam corpus impulisse. Q. E. D.

dum

dum compositâ), quâ corpus prius L urgetur, subducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, quâ corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum T ut centrum.

Corol. 2. Et, si areae illae sunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum T quamproximè.

Corol. 3. Et vice versâ, si vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum T , erunt areae illae temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus L , radio ad alterum corpus T ducto, describit areas, quae, cum temporibus collatae, sunt valdè inaequales; & corpus illud alterum, T , vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetae, ad corpus illud alterum T tendentis, vel nulla est, vel miscetur, & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (five immobile five mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modò vis centripeta fumatur, quae restat post subtractionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

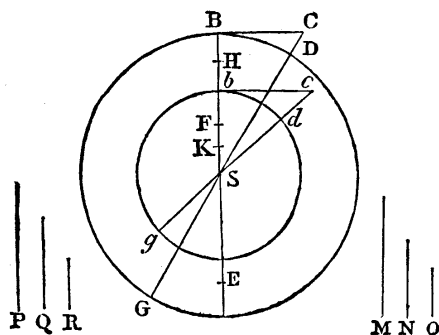
Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis

(*) Hoc est, Vires centripetae inter se proportionem gerunt, quae componitur à ratione duplicatâ arcuum, qui corporum motu simul sunt confecti, & ratione radiorum contrariâ.

(*) DEMONSTRATIO NEWTONI EXPLICATIO FACTA.

In circulo BDG , bdg , quorum centrum s , peripheriis corpora duo, a , b , motu unumquodque æquabili intelligantur circumagi. Propter motum corporis a æquabilem, arcus circuli BD , motu corporis a confecti, temporum, quibus fuerint confecti, proportionem inter se servabunt. Sectors autem cujuslibet circuli sunt inter se, ut arcus quibus insunt. Sectors igitur circuli BD , motu corporis a descripti, temporum, quibus sunt descripti, inter se proportionem servant. Vis igitur centripeta quâ corpus a motu recto detorquetur, & in circumflexu circuli BD continetur, in circuli illius centrum perpetim agit (per Th. II.) Simili argumento efficitur vim aliam centripetam, quâ corpus b motu recto detorquetur



vis illa respicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbitâ suâ retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROP. IV. THEOR. IV.

Corporum, quae diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circularum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circularum radios (d).

Tendunt hæ vires ad centra circularum per Prop. II. & Corol. 2. Prop. I. & sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quàm minimis descriptorum sinus versi per Corol. 4. Prop. I. hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circularum applicata per Lem. VII. & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibuscunque æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circularum. Q. E. D. (e).

Corol. 1. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetae erunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum directæ, & ratione simplici radiorum inversæ.

Corol. 2. Et, cum tempora periodica sint in ratione compositâ ex ratione radiorum directæ, & ratione velocitatum inversæ; vires

torquetur & in circuli bd circumflexu continetur, in centrum illius circuli perpetim agere. Corporum igitur, quae circulos diversos, BD , bd , motibus æquabilibus describunt, vires centripetae ad centra circularum tendunt. Quae prima pars est propositionis Newtonianæ.

Dico præterea virium illarum inter ipsas proportionem compositam esse à ratione duplicatâ arcuum, qui simul describuntur, & ratione radiorum contrariâ. Sint BD , bd duo quilibet arcus simul confecti. Ducantur tangentes BC , bc , quibus junctæ BD , bd et productæ in punctis c , e occurrant. Propter motus corporum æquabiles, arcus BD , bd , datam aliquam inter se proportionem servabunt; quæ ea sit quam recta m , pro arbitrio sumenda, habeat ad rectam aliam n . Eandem verò habeat n ad tertiam o . Dico vim centripetam, quâ corpus a perpetim urgetur, ad vim centripetam aliam, quâ perpetim urgetur corpus b , proportionem habere quæ componitur à ratione rectæ m ad o , & ratione rectarum se , sb contrariâ; five eam, quam habet rectangulum $m \times sb$ ad rectangulum $O \times se$. Rectæ enim BD , bd circulis iterum in punctis c , e occurrant. Si arcus BD , bd infinitè minuuntur; vires centripetae, quibus urgentur corpora a , b , in locis a , b , inter se rationem gerent, quæ rectarum evanescentium en , ed ultima erit. (Prop. I. Cor. 4.) Osiendendum igitur harum evanescentium ultimam inter ipsas rationem eam esse, quam rectangulum $m \times sb$ habet ad rectangulum $O \times se$. Id autem ostendimus hoc modo. Rectangula $ac \times en$, $ge \times ed$, quadratis ex BC , bc singulatim sunt æqualia. (El. III. 36.) Et evanescentibus arcubus BD , bd , tangentes BC , bc arcubus illis BD , bd sunt ultimò æquales (per Lem. VII.) Tangentes igitur BC , bc evanescentes,

colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam; qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem, ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus Corol. 9^(o). Et hujusmodi propositionibus *Hugenius*, in eximio suo tractatu *de Horologio Oscillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

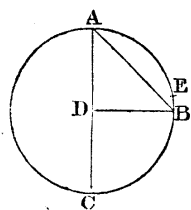
Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quocunque. Et si corpus in polygoni lateribus, datâ cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos à circulo reflectatur; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium, in dato tempore, erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum, lateribus infinitè diminutis, coincidat cum circulo, ut quadratum arcûs dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum versus.

P R O P.

(^o) PER circuitum circuli ABC magnitudine dati, cujus centrum D, ferri intelligatur corpus quoddam motu æquabili; urgente scilicet vi quâdam centripetâ, quæ centrum circuli D respiciat, & vi datâ Gravitatis apud nos æqualis sit. Ducatur diameter circuli ADC; & à centro D, ad perpendicularum cum diametro AC, educatur recta DB, quæ cum circuli circumflexu in B concurrat. Junctæ AB capiatur arcus AE æqualis. Conficietur arcus AE, motu corporis in circulo æquabili, eodem temporis spatio, quo, casu corporis recto, conficeretur spatium radio AD æquale (per Cor. 9^o). Sed propter circuli radium magnitudine datum, datum erit tempus, quo corpus grave spatium illi radio æquale casu recto conficeret. Tempus igitur, quo corpus in circulo confecerit arcum AE, datum erit. Hujus autem temporis ad tempus conversionis integræ ratio data est; ea scilicet, quam habet arcus magnitudine AE, five recta data AB, ad integrum circuli circuitum. Tempus igitur conversionis integræ datum erit. Q. E. I.

Cor. H. Tempus conversionis integræ est ad tempus casûs recti per radium ut totius circuli circuitus ad chordam quadrantis.

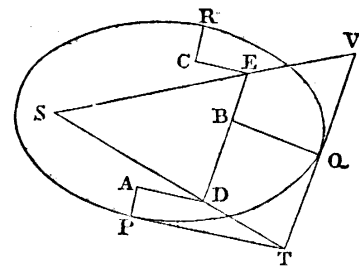
(^o) Nam rectæ à puncto D in tangentes AT, QT ad perpendicularum deductæ rectis AP, BQ æquales



P R O P. V. P R O B. I.

Datâ quibuscunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam, viribus ad commune aliquod centrum tendentibus, describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendiculara PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R, à quibus eriguntur, reciproce proportionalia; id est, ita ut sit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P; & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendicularorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, BE, CE, concurrentes in D & E: et actæ TD, VE concurrent in centro quaesito S.



Nam perpendiculara à centro S in tangentes PT, QR demissa (per Corol. 1. Prop. I.) sunt reciproce ut velocitates corporis in punctis P & Q; ideoque, per constructionem, ut perpendiculara AP, BQ directæ; id est, ut perpendiculara à puncto D in tangentes demissa (P). Unde facile colligitur quod puncta S, D, T sunt in unâ rectâ (1). Et simili argumento puncta S, E, V sunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum S in concursu rectarum TD, VE versatur. Q. E. D.

quales erunt. (El. 1. 34.)

(1) In rectas enim TP, TV, deducantur ad perpendicularum, à puncto quidem, S rectæ SX, SZ, à puncto autem D rectæ DF, DV; & XZ, SY jungantur. Rectæ SX, SZ cum rectis DF, DV parallelæ erunt. Anguli igitur XSX, FDY erunt inter se æquales. Quare cum SX sit ad SZ, ut DF ad DV (idem ostensum à Newtono) ideoque triangula SXZ, DFY inter se similia erunt, & anguli SXZ, DFY inter se æquales. (El. VI. 6.) Anguli igitur TXZ, TFY, quibus æquales illi SXZ, DFY à rectis absunt, inter se æquales erunt; ac proinde rectæ FY, XZ inter se parallelæ erunt. Quare TF erit ad TX ut FY ad XZ. Sed propter similitudinem triangulorum DFY, SXZ; FY est ad XZ ut FD ad XS. Ergo FD erit ad XS ut TF ad TX. (El. V. 11.) Ac proinde puncta T, D, S, ad rectam erunt; quod ex secunda Libri sexti Elementorum facile efficitur. Nam si T, D, S ad rectam non sint, junctæ TS rectæ DF in puncto A occurrat. Et propter rectas FA, XS inter se parallelas, erit XS ad FA ut TX ad TF. (El. VI. 2.) Sed XS ad FD ut TX ad TF, ex modo ostensis. Recta igitur XS ad inæquales FD, FA eandem proportionem habet. Quod est absurdum (El. V. 9.) Sunt igitur ad rectam puncta T, D, S. Et simili argumentatione efficitur puncta V, E, S, ad rectam esse. (Eadem ferè ad locum patres doctissimi Le Sœur & Jaquier.)

P R O P.

DE MOTU
CORPORUM

PROP. IX. PROB. IV.

Gyretur corpus in spirali PQS secante radios omnes SP, SQ, &c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.

Detur angulus indefinitè parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura SPRQT. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ ut QT, hoc est (ob datam specie figuram illam) ut SP.

Mutetur

Conic. Lib. II. 31.) & PR æqualis est dimidio parametri principalis (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) Erit igitur PD ad dimidium parametri principalis ut CF ad CB. Quod primum demonstrandum erat.

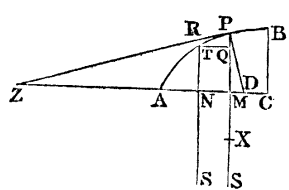
Dico secundo eandem esse rectæ PE ad CA rationem: sive PE esse ad CA ut CF ad CB. Recta PR, à puncto R in utramque partem producta, axibus, si opus sit, productis, in punctis R, S, occurrat. Propter angulos rectos RPD, RCS, angulumque ad R triangulis duobus SRC, DRP communem, reliqui illorum anguli RDP, RSC inter se æquales erunt. Rectus autem, RPD, recto EPS æqualis. Triangula igitur RPD, EPS, inter se similia, & RP:PD=EP:PS. (El. VI. 4.) Rectangula igitur RP×PS, EP×PD inter se æqualia. Rectangulum autem RP×PS quadrato ex CF æquale est. (Hamilton. Conic. Lib. I. 51.) Rectangulum igitur EP×PD quadrato ex CF æquale

erit. Ac propterea rectangulum EP×PD erit ad quadratum ex PD, hoc est, EP erit ad PD, ut quadratum ex CF ad quadratum ex PD. (El. v. 7.) Sed, per partem primam hujus Lemmatis, quadratum ex CF est ad quadratum ex PD ut quadratum ex CB, dimidio axis secundi, ad quadratum ex dimidio parametri principalis; hoc est ut CA, dimidium axis transversi, ad dimidium parametri principalis. Erit igitur EP ad PD ut CA ad dimidium parametri principalis. (El. v. 11.) Sed, per partem primam, PD est ad CF ut dimidium parametri principalis ad CB. Erit igitur ex æquo EP:CF=CA:CB, & permutando EP:CA=CF:CB. Q. E. D.

Cor. 1. Rectangulum sub EP, PD æquale est quadrato à dimidio diametri, quæ cum continetur PR parallela est.

Cor. 2. EP est ad PD ut axis transversus ad parametrum principale.

Ex his facilis erit demonstratio ejus quod Newtonus dicit, "Vim, quæ corpus retineatur in orbe conico, si illa agat secundum rectas ad axem orbis ordinatim applicatas, esse contrariè ut cubus ordinatæ."

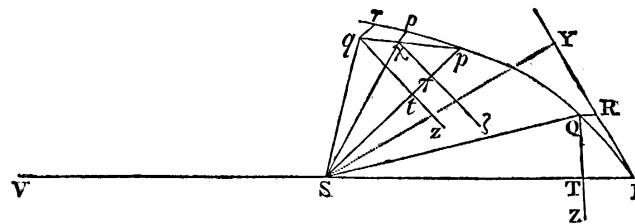


(El. VI. 2.) Et propter triangula PZM, DPM inter se similia, ZP:ZM=DP:PM. (El. VI. 31.) Quare RP:QT=OP:PM (El. v. 11.) ac propterea RP²:QT²=OP²:PM². Jam si sectio conica PTA Ellipsis sit vel Hyperbola, & axis CA si transversus ille sit; sit recta MX æqualis dimidio lateris recti principalis; & per partem primam Lemmatis, erit quadratum à rectâ MX ad quadratum ex PD, ut quadratum ex axe secundo ad quadratum à diametro quæ parallela est cum contingente PR; hoc est, ut rectangulum TR×RN+TN ad quadratum ex PR. (Hamilton. Conic. Lib. I. 31 & 40.)

Hoc

PRINCIPIA MATHEMATICA.

Mutetur jam utcumque angulus PSQ, & recta QR, angulum con-

LIBER
PRIMUS.

tactus QPR subtendens, mutabitur (per Lemma XI.) in duplicatâ ratione ipsius PR, vel QT. Ergo manebit $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ eadem quæ

Hoc est punctis Q, P coeuntibus ut TR×2PM, ad quadratum ex PR. Erit inquam MX²:PD²=TR×2PM:PR²; ultimò scilicet, arcu TP, cum rectis PR, TR, QT, evanescente. Quamobrem cum ostensum sit esse PD²:PM²=PR²:QT², erit ex æquo MX²:PM²=TR×2PM:QT²; ultimò, arcu TP evanescente. Ac propterea $\frac{2PM^3}{MX^2} = \frac{QT^2}{TR}$. Ac proinde $\frac{2PM^3 \times SP^2}{MX^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò, arcu TP evanescente. Neque huic æqualitati obstabit rectæ SP longitudo, magna illa parvave fuerit: quin & infinitè rectâ SP auctâ æquatio illa stabit. Erit igitur $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut $\frac{PM^2 \times SP^2}{MX^2}$; hoc

est, si SP infinitè augeatur, quo pacto ratio $\frac{SP^2}{MX^2}$ constans fiet, neglecta illâ ratione constante, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ut PM². Quare vis, quæ est contrariè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$, erit contrariè etiam ut PM². Q. E. D.

Si verò CA semiaxis secundus sit Ellipseos vel Hyperbolæ PTA; sit CB ejusdem semiaxis transversus. Et per partem secundam Lemmatis, quadratum ex CB erit ad quadratum ex DP ut quadratum ex axe secundo ad quadratum ex diametro quæ parallela est cum contingente PR; hoc est ut rectangulum Z ad quadratum ex PR: designante literâ Z rectangulum sub segmentis rectæ à puncto R in axem CB ordinatim deductæ, ipso puncto R curvæque interceptis. Erit inquam CB²:DP²=Z:PR². Quamobrem cum ostensum sit esse DP²:PM²=PR²:QT², erit ex æquo CB²:PM²=Z:QT². Invertendo PM²:CB²=QT²:Z. Sed CA²:CB², vel, si MX duarum CA, CB proportionem tertia fit, CB²:MX²=Z:TR×RN+TN. Quare ex æquo PM²:MX²=QT²:TR×RN+TN. Vel ultimò, arcu PT evanescente PM²:MX²=QT²:TR×2PM. Quare $\frac{QT^2}{TR} = \frac{2PM^3}{MX^2}$ ultimò. Et $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{MX^2}$

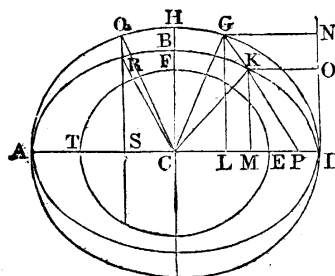
ultimò. Ac propterea $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ erit ultimò, arcu QT evanescente, ut $\frac{PM^2 \times SP^2}{MX^2}$; hoc est, si SP infinitè augeatur, quo pacto ratio $\frac{SP^2}{MX^2}$ constans fiet, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut PM². Erit igitur vis, ut PM² contrariè. Q. E. D.

Quòd si Parabola sit sectio conica PTA, erit DZ dimidium parametri diametri illius quæ per P tranfit, et DM dimidium parametri principalis. (Hamilton. Conic. Lib. II. 25.) Erit igitur DM:DZ=TR×RN+TN:PR² (Hamilton. Conic. Lib. II. 3. Cor. 3.) Vel evanescente arcu PT, erit DM:DZ=TR×2PM:PR² ultimò. Sed propter angulos ad P & M rectos, erit DM:DP=DP:DZ. (El. VI. 31.) Atque idcirco DM²:DP²=DM:DZ. Erit igitur DM²:DP²=TR×2PM:PR². Quamobrem cum ostensum sit esse DP²:PM²=PR²:QT², erit ex æquo DM²:PM²=TR×2PM:QT². Quare $\frac{QT^2}{TR} = \frac{2PM^3}{DM^2}$ ultimò. Unde $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR} = \frac{SP^2 \times 2PM^3}{DM^2}$. Ac propterea si SP infinitè augeatur, ut ratio illa $\frac{SP^2}{DM^2}$ constans fiat, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut PM². Ergo vis erit ut PM² contrariè. Q. E. D.

prius,

Scholium.

Si Ellipsis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabolâ; & vis, ad centrum infinite distans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc est theorema Galilei. Et si conic sectio parabolica (inclinazione plani ad conum sectum mutatâ) vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in huius perimetro, vi centripetâ in centrifugam versâ⁽¹⁾. Et quemadmodum in circulo vel ellipsi, si vires tendunt ad centrum figu-



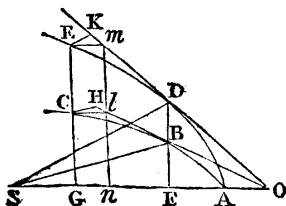
rum e trahuntur. (Prop. I. Cor. 4.) Quamobrem, cum eadem vi centripetâ, in loco D, corpus utrumque urgeatur, rectæ illæ CG , CO erunt ultimò inter se æquales. Recta igitur CK erit ultimò saltem cum contingente DN parallela, ac proinde ad axem AD ordinata. Evanescentium igitur GP , PK ratio inter ipsas ultima ea erit, quæ est ordinarum inter ipsas quibus abscissa est communis. Atque hæc est, axium CH , CB inter ipsos data ratio. Tempus igitur conversionis in ellipsi DEA ad tempus conversionis in ellipsi DHA rationem habebit eam, quæ composita est e ratione rectæ CB ad CH , rectæque CH ad CE . Tempora igitur conversionum in ellipsis DEA , DHA erunt inter se æqualia. Ellipses autem DHA , EFT , cum sint inter se similes, &

corpora in ellipsis illis retineantur viribus, quæ commune illarum centrum C respiciant; idcirco vires illæ, secundum propositionem x , erunt ubique ut distantia corporum à centro; & conversio in his ellipsis tempora erunt inter se æqualia. (Prop. IV. Cor. 3 & 8.) Hoc est tempus conversionis in EFT tempori conversionis in DHA æquale. Huic autem tempus conversionis in DEA ostensum est æquale. Tempora igitur conversionum in ellipsis DHA , EFT inter se æqualia. Q. E. D.

Cor. H. Si ad axem AD , qui ellipsium DEA , DHA transversus est communis, agatur quævis ordinata, quæ ellipses in punctis R , Q secet; iunctis CR , CQ , sectores elliptici DCR , DCQ motu corporum simul describuntur. Ac proinde recta QR , quæ puncta illa ellipsium, DHA , DEA , jungit, quæ corpora mobilia, si e loco D simul fuerint egressa, simul appulerint, recta inquam QR quæ hæc puncta jungit, non modo ultimò, sed semper quidem ad axem ellipsium communem AD ordinata erit. Sectores enim DCR , DCQ erunt inter se ut CB ad CH , hoc est ut area totæ ellipsium quarum sunt sectores. (Lemma IV. Cor. H. 1.) Permutando, area tota ellipsios DHA , ad sectorem DCR ut area tota ellipsios DHA ad sectorem DCQ . Est autem area tota ellipsios DHA ad sectorem DCR ut tempus conversionum in ellipsis DHA , DHA ad tempus quo describitur sector DCR . (Prop. I.) Et area tota ellipsios DHA ad sectorem DCQ sicut idem tempus conversionum in ellipsis DHA , DHA ad tempus quo describitur sector DCQ . Tempus igitur conversionum in ellipsis ad tempora quibus describuntur sectores DCR , DCQ eandem rationem habet. (El. V. 11.) Quare tempora quibus sectores illi describuntur inter se æqualia erunt. (El. V. 9.) Sectores igitur illi simul describentur, si corpora mobilia e loco D simul egressa fuerint. Q. E. D.

⁽¹⁾ Vide Tom I. (Excerpt. ex Epist. IV. Not. 2.)

^(mm) SINT CURVÆ ABC , ADE AXE COMMUNI AS , quæ eo modo ad se mutuò sint affectæ, ut ordinatis quibuscumque, ab eodem axis puncto exeuntibus, data quædam ratio intercedat; unde illud etiam consequetur, ut areis curvarum totis, si ex earum quidem genere sint quæ in orbem redeant, vel partibus earum ad communem quamlibet ordinatam terminatis, eadem data ratio intercedat. (Lemma Cor. H. 1.) In his Curvis ferri intelligantur corpora, viribus centripetis, quæ centrum S in axe communi positum respiciant, sollicitata; atque eâ quidem lege, ut tempora conversionum integra, si Curvæ ex earum genera sint quæ in orbem redeant; aliter verò, ut tempora, quibus absolvuntur



ræ in abscissâ positum; hæ vires, augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcumque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinarum ad abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum à centro, si modò tempora periodica maneant æqualia; sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcumque datâ, vel angulus ordinationis utcumque mutetur, manente tempore periodico; vires, ad centrum quodcumque in abscissâ positum tendentes, in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum à centro^(mm).

SECTIO

absolvuntur sectores quidam quibus abscissa est communis, inter se æqualia sint. Agatur quævis DE ad axem SA ordinata, quæ axi illi in puncto E , curvis in E , D , occurrat. Jungantur SB , SD . Dicit Newtonus vim centripetam in loco B esse ad vim centripetam in loco D ut SE , ad SD . Nos autem ostendimus quod Newtonus dicit hoc modo.

Ducatur alia quævis EG ad axem AS ordinata, quæ axi in G , curvis in punctis C , E occurrat. Jam cum tempora, vel conversionum tota, si curva utraque in orbem redeat; vel, si in orbem neutra redeat, tempora tamen quibus absolvuntur sectores quidam, quibus abscissa est communis, sint inter se æqualia; ex eo consequetur, tempora, quibus quilibet sectores quorum abscissa est communis absolvuntur, esse etiam inter se æqualia. Id enim eadem argumentatione obtinebimus, quæ corollarium nostrum e corollario Newtoni secundo demonstravimus. Iunctis igitur, SC , SE sectores ASC , ASE quorum abscissa AG est communis. Corpora igitur, cum ad loca E , D ea simul appulerint, atque rursus ad loca C , E simul, sectores BSC , DSE simul descriperint. Ducatur recta BO , quæ curvam ADE in B contingat. Hæc axi SA in O occurrat, et jungatur ON . Propter datam ordinarum, FB , FD , inter ipsas rationem, ordinatæ illæ cum fluxionibus suis proportionem convenient (Geometr. Flux. Prop. IV.) hoc est $FD:FB = FD:FE$. Et cum OB curvam ABC

in B contingat, erit $FB:FO = FB:AF$. Erat igitur ex æquo $FD:FO = FD:AF$. Quare recta OD curvam ADE in D continget. Actis igitur à punctis C , E rectis CH , EK cum illis SB , SD parallelis, quæ rectis OB , OD in punctis H , K occurrant, vis centripeta in loco B ad vim centripetam in loco D rationem habebit eam, quæ sectoribus BSC , DSE infinite imminutis, evanescentium CH , EK ultima inter ipsas erit. Ostendendum igitur hanc rationem ultimam eam esse, quæ est rectæ SB ad SD . Agatur CL cum axe SA parallela, quæ contingenti OB in L occurrat. Per L ducatur mn cum ordinatis ad axem SA parallela, quæ axi in n , contingenti OD in m , occurrat; & jungatur EM . Propter rectas duas CH , CL cum duabus SB , SD parallelas, triangula hcl , bsd inter se similia erunt, & ch erit ad cl ut sb ad sd . Propter rectas FD , mn inter se parallelas, erit ln ad lm ut fb ad gd . Est autem, propter illam quæ posita est curvarum ad se mutuò affectionem, fb ad bd ut gc ad ce . Ergo nl erit ad lm ut gc ad ce . (El. V. 11.) Sunt autem nl , gc inter se æquales, utpote quæ parallelogrammi nc ad versa inter se sint latera. Erunt igitur & lm , ec inter se æquales. (El. V. 14.) Sunt autem ex constructione inter se parallelæ. Quare em , cl parallelæ etiam inter se & æquales erunt. (El. I. 33.) Et em , cum ea sit parallela cum cl parallela erit cum axe so . (El. I. 30.) Duæ igitur ek , em , cum duabus sd , so sunt parallelæ. Unde consequetur, triangula ekm , uso inter se similia esse, atque ek esse ad em , vel illi æqualem cl , ut sd ad so . Sed cl est ad ch ut so ad sb . Id enim jam antè ostensum est. Ex æquo igitur ek erit ad ch ut sd ad sb . Et invertendo $ch:ek = sb:sd$. Neque huic rationi officiet sectorum BSC , DSE magnitudines, magni illi parve fuerint. Sectoribus igitur illis, regressu punctorum E , C , ad manentia D , B , infinite imminutis, rectis evanescentibus CH , EK eadem inter ipsas ratio, quæ est rectis sb , sd , vel ultimò manebit. Quamobrem & vis centripeta in loco B erit ad vim centripetam in loco D ut sb ad sd . Q. E. D.

Verum dicit Newtonus idem obtinere, etiam si angulus ordinationis utcumque mutetur. Hoc autem verè dici rationibus ex istis fere fontibus derivatis facile erit ostendere, modò prius quam dictum est paulo enodatiùs exposuerim.

SECTIO III.

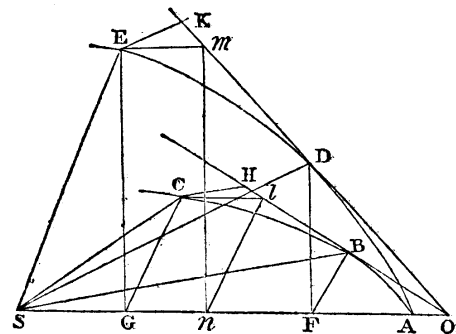
De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

PROP. XI. PROB. VI.

Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

Est ellipseos umbilicus s. Agatur SP fecans ellipseos tum diametrum DK in E , tum ordinatim applicatam QV in x , & compleatur parallelogrammum $QXPR$. Patet EP æqualem esse semi-axi majori AC ; eo quod, acta ab altero ellipseos umbilico, H , lineâ HI ipsi EC parallelâ, ob æquales CS , CH , æquentur ES , EH , adeo ut EP semifumma sit ipsarum PS , PH ; id est (ob parallelas HI , PR , & angulos æquales IPR , HPZ) ipsarum PS , PH , quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT , & ellipseos latere recto principali (feu $\frac{2BC \text{ quad.}}{AC}$) dicto L , erit $L \times QR$ ad $L \times PV$ ut QR ad PV , id est, ut PE feu AC ad

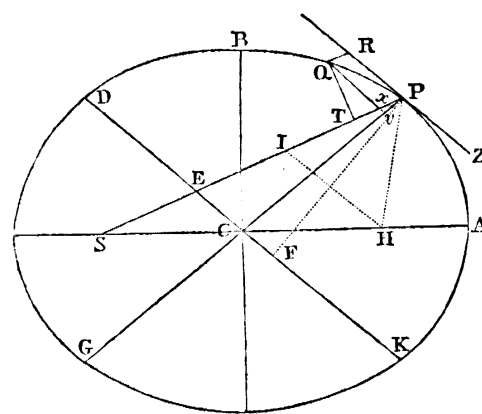
Sint igitur duæ Curvæ ABC , ADE , axe communi AS , quæ eo modo ad se mutuò sint affectæ, ut si à quolibet axis puncto, puta F , educantur datis, sed diversis, ad axem AS inclinationibus rectæ FB , FD , quæ Curvis in punctis B , D occurrant, habeat FB , ad FD rationem quandam datam. Unde illud etiam consequetur, ut areis curvarum totis, si sint illæ ex earum genere quæ in orbem redeant, vel partibus earum quæ ordinatis quibilibet conjugatis intercipientur, data quadam ratio intercedat: ea nimirum, quam rectæ, à punctis B , D in axem AF ad perpendicularum demissæ, inter se habent. (Lemma IV. Cor. H. 3.) Conjugatas autem ordinatas eas voco, quæ in hujusmodi curvis ab eodem axis communis puncto educatæ sunt. Jam per has curvas ABC , ADE ferri intelligantur corpora, viribus centripetis, quæ centrum S in axe curvarum communi positum respiciant, sollicitata; atque eâ quidem lege, ut tempora conversionum integra, si curvæ in orbem redeant; aliter verò, ut tempora quibus



absolvuntur sectores quidam, quibus abscissa est communis, inter se æqualia sint. A quovis axis puncto educantur ordinatæ conjugatæ FB , FD , & SB , SD jungantur. Jam quod dicit Newtonus hoc est. Vim centripetam in loco B esse ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD . Oſtendimus autem quod Newtonus dicit hoc modo.

Ab alio quovis axis puncto, G , educantur ordinatæ conjugatæ, GC , GE , cum prioribus utique FB , FD parallelæ; junctisque SC , SE corpora mobilia, si è loco A simul ea fuerint egressa, sectores orbitæ unumquodque suæ, ASC , ADE simul descriperint. Hoc enim eâdem argumentatione ac prius obtinebimus. Ductâ autem rectâ BO , quæ curvam ABC in B contingat, si hæc axi AS in

O. oc-



ad PC ^(a); & $L \times PV$ ad GV ut L ad GV ; & GV ad QV quad. ut PC quad. ad CD quad. & (per Corol. 2. Lem. VII.) QV quad. ad QX quad. punctis Q & P coeuntibus est ratio æqualitatis; & QX quad. feu QV quad. est ad QT quad. ut EP quad. ad PF quad. ^(b) id est, ut CA quad. ad PF quad. five (per Lem. XII.) ut

CD quad. ad CB quad. Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad QT quad. ut $AC \times L \times PCQ \times CDQ$, feu $2CBQ \times PCQ \times CDQ$ ad $PC \times GV \times CDQ \times CBQ$, five ut $2PC$ ad GV . Sed, punctis Q & P coeuntibus, æquantur $2PC$ & GV . Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT quad. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPQ}{QR}$, & fiet $L \times SPQ$ æquale $\frac{SPQ \times QTQ}{QR}$. Ergo (per Corol. I & 5. Prop. VI.) vis

occurrat, juncta OP curvam alteram ADE continget in D . Id enim eisdem prorsus verbis, quibus antea usus sumus, ostendere licet. Actis igitur à punctis C , E , rectis CH , EX cum illis SB , SD parallelis, quæ rectis OB , OD , in punctis H , K occurrant; vis centripetæ in loco B ad vim centripetam in loco D rationem habebit eam, quæ sectoribus BSC , DSE infinitè imminutis, evanescentium CH , EX ultima inter ipsas erit. Oſtendendum igitur hanc rationem ultimam eam esse, quæ est rectæ SB ad SD . Acta cl ut prius, cum axe SA parallela, contingenti oa in l occurrat. Per l ducatur lm cum FB parallela; & à puncto n , ubi illa lm axem secat, agatur nm parallela cum FD , & occurrat illa nm contingenti od in m . Jungatur autem em . Propter rectas nl , fb inter se parallelas, erit nl ad fb ut no ad of . Atque rursum propter rectas nm , fd inter se parallelas, erit no ad of ut nm ad fd . Quare nl erit ad fb ut nm ad fd . (El. V. 11.) Permutando nl ad nm ut fb ad fd . Est autem, propter illam quæ posita est curvarum ad se mutuò affectionem, fb ad fd ut gc ad ge . Est igitur nl ad nm ut gc ad ge . (El. V. 11.) Sunt autem nl , gc inter se æquales, utpote quæ parallelogrammi nc ex adverso sint latera. Erunt igitur nl , gc inter se æquales. (El. V. 14.) Sunt autem parallelæ ex constructione. Quare & em , gn parallelæ inter se & æquales erunt. Propter duas igitur ek , fm cum duabus so , so parallelas, triangula kem , dso , ut prius, inter se similia erunt, & ek erit ad em ut so ad so . Verùm cum illa em æqualis sit rectæ gn , etiam illi cl æqualis erit. Quare ek erit ad cl ut so ad so . Sed propter duas en , cl cum duabus sa , so parallelas, triangula illa hel , dso , ut prius, inter se similia erunt, & cl ad en ut so ad so . Ex æquo igitur ek erit ad en , ut so ad se . Ex quo eodem prorsus modo ac antè colligitur vim centripetam in loco B esse ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD . Q. E. D.

(^a) Sunt QV , XP inter se æquales, utpote quæ parallelogrammi QXP ex adverso inter se sint latera. Quare $QV:XP = PV:PV$. Sed propter rectas QV , PC inter se parallelas, triangula QVP , PCV erunt inter se similia, & $PV:PV = PV:PC$.

(^b) Angulus rectus QXP , recto PFE æqualis. Sed propter rectas QV , FF inter se parallelas, anguli QXP , PFE inter se æquales erunt. (El. I. 29.) Triangula igitur QXP , PFE , inter se similia, et $QV:QT = PF:FE$. (El. VI. 4.) Quare $QV^2:QT^2 = PF^2:FE^2$. (El. VI. 22.)

centripeta reciproce est ut $L \times spq$, id est, reciproce in ratione duplicatâ distantiae sp . Q. E. I.

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus p in ellipfi illâ revolvitur potest, fit (per Corol. I. Prop. x.) ut cp distantia corporis ab ellipseos centro c ; ducatur ce parallela ellipseos tangenti pr ; & vis, quâ corpus idem p circum aliud quodvis ellipseos punctum s revolvitur potest, si ce & ps concurrant in e , erit ut $\frac{pe \text{ cub.}}{sp^2}$ (c) (per Corol. 3. Prop. vii.) hoc est, si punctum s sit umbilicus ellipseos, ideoque pe detur, ut spq reciproce. Q. E. I.

Eâdem brevitate, quâ traduximus Problema quintum ad Parabola, & Hyperbola, liceret idem hîc facere: verum ob dignitatem problematis, & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

PROP. XII. PROB. VII.

Moveatur corpus in Hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto ca , cb femiaxes hyperbolæ; pg , kd diametri aliæ conjugatæ; pf perpendicularum ad diametrum kd ; & qv ordinatim applicata ad diametrum gp . Agatur sp secans cum diametrum dk in e , tum ordinatim applicatam qv in x , & compleatur parallelogrammum $qrp\alpha$. Patet ep æqualem esse semiaxi transverso ac ; eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico h lineâ hi ipsi ec parallelâ, ob æquales cs , ch , æquantur es , ei ; adeo ut

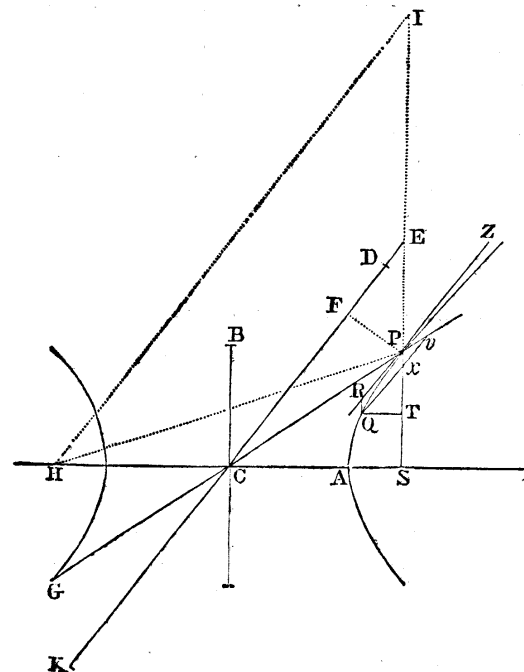
EP

(c) Nimirum si corpora duo, quorum alterum vi quâdam centrum c , alterum aliâ vi centrum s respiciente perpetim urgeatur, orbem ellipticum abg eodem tempore absolvant, erit in quovis orbitæ puncto p vis illa quæ centrum c respicit ad vim aliam, punctum s respicientem, ut $c\alpha \times sp^2$ ad ep^3 . (Prop. vii. Cor. 3.) Sit y recta, ad quam semiaxis ac rationem habeat eam, quam vis illa quæ centrum c respicit, in vertice a , ad vim alteram in dato loco p . Et mutato loco p , recta y eâ semper lege fluat, ut ad semiaxem ca ea semper rationem habeat, quam vis punctum s respiciens, in loco p , ad vim quæ centrum c respicit in loco a . Ita vis illa quæ respicit punctum s semper erit ut recta y . Jam cum vis illa quæ centrum c respicit in loco a , ad vim alteram centrum s respicientem in loco p , rationem habeat eam, quæ composita est è ratione, quam vis centrum c in loco a respiciens habet ad vim idem centrum c respicientem in loco p , cum $c\alpha$, quam vis centrum c respiciens in loco p habet ad vim alteram centrum s respicientem in eodem loco p , ideoque ha-

bebit

ep semidifferentia sit ipsarum ps , pi , id est (ob parallelas ih , pr & angulos æquales ipr , hpz) ipsarum ps , ph , quarum differentia axem totum $2ac$ adæquat. Ad sp demittatur perpendicularis qr . Et hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L , erit $L \times qr$ ad $L \times pv$ ut qr ad pv , seu px ad pv , id est (ob similia triangula pxv , pec) ut pe ad pc , seu ac ad pc (d). Erit etiam $L \times pv$ ad $gv \times pv$ ut L ad gv ; & (ex naturâ conicorum) rectangulum gvp ad

$qv \text{ quad.}$ ut pcq ad cdq ; & (per Corol. 2. Lem. vii.) $qv \text{ quad.}$ ad $qx \text{ quad.}$ punctis q & p coeuntibus fit ratio æqualitatis; & $qx \text{ quad.}$ seu $qv \text{ quad.}$ est ad qrq ut epq ad pfq (e), id est, ut caq ad pfq , five (per Lem. xii.) ut cdq ad cbq ; & conjunctis his omnibus rationibus $L \times qr$ fit ad qrq ut $ac \times L \times pcq \times cdq$, seu $2cbq \times pcq \times cdq$, ad $pc \times gv \times cdq \times cbq$, five ut $2pc$



hebit ac ad y rationem ex eisdem compositam. Harum verò prior ea est, quam ac habet ad pc (Prop. x. Cor. 1.) posterior autem ea est, quam solidum $cp \times sp^2$ habet ad cubum ex ep (Prop. vii. Cor. 3.) hoc est, si s umbilicus sit ellipseos, ad cubum ex ca . Habet igitur ca ad y rationem eam, quæ componitur è rationibus rectæ ca ad cp , solidique $cp \times sp^2$ ad ca^3 ; five eam, quæ componitur è rationibus solidi $ca \times sp^2$ ad $cp \times sp^2$, solidique $cp \times sp^2$ ad ca^3 . Verum solidi $ca \times sp^2$ ad ca^3 ex eisdem composita est ratio. Quare ca erit ad y ut $ca \times sp^2$ ad ca^3 ; hoc est ut sp^2 ad ca^2 . Ergo $y \times sp^2 = ca^2$. Et $y = \frac{ca^2}{sp^2}$. Erit igitur y , ob datum ca^2 , ut sp^2 contrariè. Q. E. D.

(d) Vide Not. a.

(e) Vide Not. b.

DE MOTU
CORPORUM

ad gv . Sed, punctis p & q coeuntibus, æquantur $2pc$ & gv . Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicatâ distantie SP . Q. E. I.

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro c . Prodiabit hæc distantie cp proportionalis. Inde verò (per Corol. 3. Prop. VII.) vis ad umbilicum s tendens erit ut $\frac{PE \text{ cub.}}{SPq}$ (^f), hoc est, ob datam PE , reciprocè ut SPq . Q. E. I.

Eodem modo (^g) demonstratur, quòd corpus, hac vi centripetâ in centrifugam versâ, movebitur in hyperbolâ oppositâ.

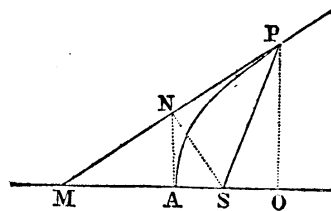
L E M M A XIII.

Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantie verticis illius ab umbilico figuræ.

Patet ex conicis (^h).

L E M M A XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici à puncto contactûs & à vertice principali figuræ.



Sit enim AP parabola, s umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactûs, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M , & SN linea perpendicularis ab umbilico in tan-

(^f) Vide Not. c.

(^g) Immo eisdem verbis.

(^h) Hamilton. Conic. Lib. II. Prop. xxv. et Cor.

gentem.

gentem. Jungatur AN ; & ob æquales MS & SP , MN & NP , MA ^{LIBER PRIMUS.} & AO , parallelae erunt rectæ AN & OP ; & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A , & simile triangulis æqualibus SNM , SNP : ergo ps est ad SN ut SN ad SA . Q. E. D (^k).

Corol. 1. Psq est ad SNq ut ps ad SA .

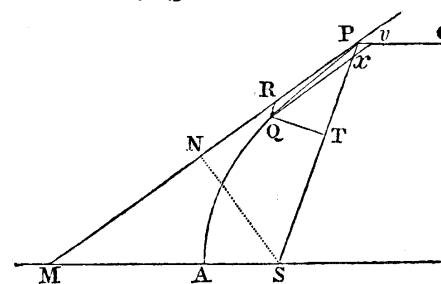
Corol. 2. Et, ob datam SA , est SNq ut ps .

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis PM cum rectâ SN , quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, indicit in rectam AN , quæ parabolam tangit in vertice principali.

P R O P. XIII. P R O B. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio lemmatis; sitque p corpus in perimetro Parabolæ, & à loco Q , in quem corpus proximè movetur, age ipsi sp parallelam QR , & perpendiculararem QT , necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v , tum distantie sp in x . Jam ob similia triangu-
la pxv , SPM , & æqualia unius latera SM , SP , æqualia sunt alterius latera px , seu QR , & pv . Sed, ex conicis, quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri pv , id est (per Lem. XIII.) rectangulo $4ps \times pv$, seu $4ps \times QR$; & punctis p & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per Corol. 2. Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo



Qx quad. eo in casu æquale est rectangulo $4ps \times QR$. Est autem (ob similia triangu-
la QTx , SPN) Qxq ad QTq ut psq ad SNq , hoc est (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut ps ad SA , id est, ut $4ps \times QR$ ad $4sa \times QR$, & inde (per Prop. IX. Lib. v. Elem.)

QTq & $4sa \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale $SPq \times 4sa$: & propterea (per Corol. 1 & 5. Prop.

(^k) Est hæc Propositio tricesima Libri secundi Conicorum Hamiltoni.

DE MOTU
CORPORUM

dem vi centripetâ eâdemque velocitate describi non possunt.

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco suo P , ea fit, quâ lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium QR : movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione, cujus latus rectum principale est quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimò fit, ubi lineolæ PR , QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad Ellipsin; & casum excipio, ubi corpus rectâ descendit ad centrum.

PROP. XIV. THEOR. VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciproce in duplicatâ ratione distantie locorum à centro; dico, quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore describunt.

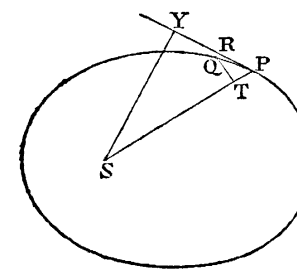
Nam (per Corol. 2. Prop. XIII.) latus rectum L æquale est quantitati

cum rectâ QA sint parallelæ, quæque rectam PA in P contingat, & per datum punctum A transeat. Hæc parabola positione dabitur; & cum corpus è loco P cum velocitate illâ, quam posuimus, discedens, per hanc parabolam incederet, si vis centripeta eadem maneret, & secundum rectas cum illâ QA parallelas semper ageret; idcirco hujus parabolæ eadem erit, quæ orbitæ, per quam corpus fertur, in loco P curvatura. Hoc est idem circulus curvam utramque, parabolam & orbitam, in loco P osculabitur. Circulus autem, qui parabolam ABF positione datam, in dato puncto P osculatur, magnitudine & positione ipse datus erit. Circulus igitur qui orbitam in loco P osculatur magnitudine & positione datus. Q. E. D. (*Eadem fere Le Saur & Jacquier.*)

(N) DEMONSTRATIO NEWTONI EXPLICATIONE FACTA.

CORPORA duo ferri intelligantur circa centrum commune s , urgentibus viribus quæ centrum illud s respiciant, quæque sint semper inter se ut quadrata distantiarum à centro illo contrariè sumpta. Corpora igitur in orbibus conicis ferentur, quorum s umbilicus erit. Sint orbis illi APB , apb , et sint rsq , psq orbium sectores quidam, qui motu corporum simul describuntur. Dicit Newtonus orbium APB , apb latera recta rationem inter se habere, arearum rsq , psq duplicatam. Sint L , l , orbium APB , apb , latera recta. Cum sectores rsq , psq , simul describantur; propter æquabilem arearum circa centrum s descriptionem, eadem semper sectoribus illis inter ipsos ratio erit, quæcunque fuerint illorum magnitudines. Eadem igitur illis semper manet, quæ nascentium prima fuit. Prima autem nascentium fuit, quæ rectangulorum $sp \times qr$, $sp \times qt$ nascentium prima. Ostendendum igitur L ad l rationem habere eam, quæ composita est è ratione quadrati ex sp ad quadratum ex sp , & ratione primâ quadrati è nascente qr ad quadratum è nascente qt . Sed per Corollarium 2. Prop. XIII. coeuntibus punctis q , p , $qr^2 = L \times qr$; & coeuntibus punctis q , p , $qt^2 = l \times qr$. Quare $L \times qr : l \times qr = qr^2 : qt^2$, ultimò scilicet, arcubus rq , pq infinitè imminutis. Sed $L \times qr : l \times qr = qr : qt$. Quare ex æquo $L \times qr$ ad $l \times qr$, sive L ad l , rationem habet eam, quæ composita est è ratione primâ quadrati è nascente qr ad quadratum è nascente qt , & ratione nascentis qr ad nascentem qr . Sed cum sectores rsq , psq , simul deservantur, ea erit nascentis qr ad nascentem qr prima ratio, quæ vis centripetæ in loco p ad vim centripetam in loco p ; sive quæ quadrati ex sp ad quadratum ex sp . Ratio igitur L ad l composita

quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimò fit, ubi coeunt puncta P & Q . Sed LIBER PRIMUS.



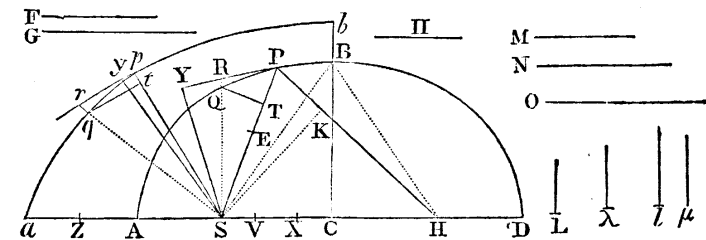
hoc est (per hypothefin) reciproce ut spq . Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times spq$; hoc est, latus rectum L in duplicatâ ratione areæ $QT \times sp$ (N). Q. E. D.

Corol. Hinc Ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times sp$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum (°).

PROP. XV. THEOR. VII.

Idem positis, dico quod tempora periodica in Ellipsis sunt in ratione sesquiquadratâ majorum axium (P).

Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum; atque ideo rectangulum sub axibus est in composita est è ratione primâ quadrati è nascente qr ad quadratum è nascente qt , & ratione qua-



drati ex sp ad quadratum ex sp . Atque hæc est arearum quæ simul conficiuntur duplicata ratio. Q. E. D.

(°) ORBES conici APB , apb Ellipses sint, quarum centrum c , semiaxes transversi ca , ca , secundi cb , cb . Ellipseos APB area significetur literâ A ; alterius apb , literâ a . Sint rectæ m , n , quarum m habeat ad n proportionem eam, quam tempus conversionis in Ellipsi APB ad tempus conversionis in Ellipsi apb ; & capiatur λ , quæ laterum rectorum, L , l proportionem media fit. Dicit Newtonus esse A ad a , ut $m \times L$ ad $n \times \lambda$.

Capiatur recta Π , quæ fit ad m ut tempus quo conficiuntur sectores pqs , pqs , ad tempus conversionis in ellipsi APB . Eadem Π erit ad n ut tempus quo conficiuntur sectores illi pqs , pqs ad tempus conversionis in ellipsi alterâ apb . Jam area A erit ad sectorem pqs ut m ad Π , sive ut $m \times L$ ad $\Pi \times L$ (Prop. I.) Sed sector pqs ad sectorem pqs ut L ad λ (per Prop. XIV.) sive ut $\Pi \times L$ ad $\Pi \times \lambda$. Et sector pqs ad aream a ut Π ad n (Prop. I.) sive ut $\Pi \times \lambda$ ad $n \times \lambda$. Ex æquo igitur area A ad aream a ut $m \times L$ ad $n \times \lambda$. Q. E. D.

(P) Sive rationem axium majorum triplicatam temporum duplicatam esse.

ratione

DE MOTU
CORPORUM

ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & fesquipli-
catâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per Corol. Prop.
xiv.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti
& ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata
ratio lateris recti, & manebit fesquuplicata ratio majoris axis ea-
dem cum ratione periodici temporis. Q. E. D. (q).

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsis eadem ac in
Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

P R O P. XVI. T H E O R. VIII.

*Isdem positis, & aëlis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangent
orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes per-
pendicularibus: dico, quod velocitates corporum sunt in ratione
compositâ ex ratione perpendicularum inversè, & subduplicatâ
ratione laterum rectorum principalium directè.*

Ab umbilico s ad tangentem PR demitte perpendicularum SY , &
velocitas corporis P erit reciproce in subduplicatâ ratione quanti-
tatis $\frac{SY}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quàm minimus PQ in
datâ

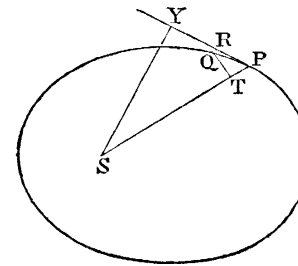
(q) DEMONSTRATIO NEWTONI EXPLICATIO FACTA.

CAPRIATUR o cum duabus m, n , proportionem tertia; capiantur etiam cv, cx , ut ca ha-
beat ad cv , & cv ad cx rationem quam ca ad ca . Ostendendum est esse o ad m ut ca ad cx .
Capiatur μ , ad quam λ proportionem habeat quam m ad n . Jam cum sit $m : n = \lambda : \mu$, erit
rectangulum $m \times l$ ad rectangulum $n \times l$ ut λ ad μ . Sed rectangulum $n \times l$ est ad rectangulum
 $n \times \lambda$ ut l ad λ . Erit igitur ex æquo perturbatè, $m \times l$ ad $n \times \lambda$ ut l ad μ . Sed $m \times l : n \times \lambda =$
 $ca \times cb : ca \times cb$ (Prop. xiv. Cor.) Ergo $ca \times cb : ca \times cb = l : \mu$. Hoc est, ratio rectæ l ad μ
componitur è rationibus rectæ ca ad ca , rectæque cb ad cb . Quare quadratum ex l ad qua-
dratum ex μ rationem habebit eam, quæ componitur è ratione quadrati ex ca ad quadratum ex
 ca , quadraticque ex cb ad quadratum ex cb . Sed propter continuam rectarum ca, ca, cv ana-
logiam, erit quadratum ex ca ad quadratum ex ca ut cv ad ca . Et quadratum ex cb est ad qua-
dratum ex cb ut rectangulum $ca \times l$ ad rectangulum $ca \times l$. (Nam hæc rectangula quadratorum
illorum dupla sunt). Quadratum igitur ex l ad quadratum ex μ rationem habebit eam, quæ com-
ponitur è rationibus rectæ cv ad ca rectangulique $ca \times l$ ad rectangulum $ca \times l$; five eam, quæ
est solidi $cv \times ca \times l$ ad solidum $ca^2 \times l$. Est autem quadratum ex l ad quadratum ex μ , ut so-
lidum $l^2 \times l$ ad solidum $\mu^2 \times l$. Quare $l^2 \times l : \mu^2 \times l = cv \times ca \times l : ca^2 \times l$. Permutando, rectan-
gulum $l \times l$ ad rectangulum $cv \times ca$ ut quadratum ex μ ad quadratum ex ca . Hoc est, cum
 $l \times l = \lambda^2, \lambda^2 : cv \times ca = \mu^2 : ca^2$. Permutando $\lambda^2 : \mu^2 = cv \times ca : ca^2$. Sed $\lambda^2 : \mu^2 = m^2 : n^2 = m : o$
(ex construct.) Quare m habet ad o proportionem eam, quam rectangulum $cv \times ca$ ad qua-
dratum ex ca ; five eam, quæ composita est è rationibus rectæ cv ad ca rectæque ca ad ca ;
five è rationibus rectæ cx ad ca (est enim $cv : ca = cx : ca$ ex construct.) rectæque ca ad ca ;
Sed ratio rectæ cx ad ca ex eisdem est composita. Quare $m : o = cx : ca$. Invertendo $o : m =$
 $ca : cx$. Q. E. D.

(r) DEMONSTRATIO NEWTONI EXPLICATIO FACTA.

SINT rectæ F, G , quarum F sit ad G ut velocitas corporis in orbe APB lati, in loco P , ad velocita-
tem

datâ temporis particulâ descriptus, hoc est (per Lem. vii.) ut tan-
gens PR ; id est, ob proportionales PR ad QR & SP ad SY , ut $\frac{SP \times QT}{SY}$,
PRIMUM.



five ut SY reciproce & $SP \times QT$ directè;
estque $SP \times QT$ ut area dato tempore de-
scripta, id est (per Prop. xiv.) in sub-
duplicatâ ratione lateris recti. Q. E.
D. (r).

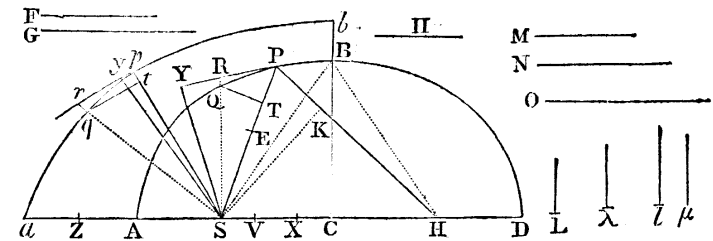
Corol. 1. Latera recta principalia
sunt in ratione compositâ ex duplicatâ
ratione perpendicularum, & duplicatâ
ratione velocitatum (r).

Corol. 2. Velocitates corporum, in maximis & minimis ab
umbilico communi distantis, sunt in ratione compositâ ex ra-
tione distantiarum inversè, & subduplicatâ ratione laterum rec-
torum principalium directè. Nam perpendiculara jam sunt ipsæ
distantiæ (r).

Corol.

tem corporis in orbe altero apb lati, in loco p . In tangentes py, py demissis ad perpendicularum
rectis sy, sy , dicit Newtonus F esse ad G ut $l \times sy$ ad $\lambda \times sy$. Nam cum sectores psq, psq si-
mul describantur, erit F ad G ut sq ad pq ; ultimò utique, arcubus sq, pq infinitè imminutis.
Erit autem pq ad pq ut pr ad pr ultimò (Lemma vii.) Quare $F : G = pr : pr$ ultimò. Ac pro-
inde $F \times sy : G \times sy = pr : pr = sy \times pr : sy \times pr$ ultimò.

Sed $G \times sy : G \times sy = sy \times pr : sy \times pr$. Ex æquo igitur $F \times sy : G \times sy = sy \times pr : sy \times pr$;



ultimò scilicet arcubus qr, qp infinitè imminutis. Sed illa $sy \times pr, sy \times pr$, illis $sp \times qt, sp \times qt$
ultimò sunt æqualia. Quare $F \times sy : G \times sy = sp \times qt : sp \times qt$ ultimò. Et $sp \times qt : sp \times qt$ ultimò
 $= l : \lambda$ (Prop. xiv.) Quare $F \times sy : G \times sy = l : \lambda = l \times sy : \lambda \times sy$. Et $G \times sy : G \times sy = sy \times pr : sy \times pr$
 $= \lambda \times sy : \lambda \times sy$. Quare ex æquo $F : G = l \times sy : \lambda \times sy$. Q. E. D.

(r) NAM ostensum est esse $F \times sy : G \times sy = l : \lambda$. Habet igitur l ad λ rationem eam, quæ
componitur è ratione rectæ F ad G rectæque sy ad sy . Quadratum igitur ex l ad quadratum ex λ
rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus quadrati ex F ad quadratum ex G , & quadrati
ex sy ad quadratum ex sy . Et ratio rectæ l ad λ , cum eadem sit illa quæ quadrati ex l ad qua-
dratum ex λ , ex eisdem utique componitur. Ratio igitur rectæ l ad λ componitur è rationibus
quadrati ex F ad quadratum ex G , quadraticque ex sy ad quadratum ex sy . Q. E. D.

(r) PUNCTIS utique P, p in punctis A, a , qui vertices sunt orbium, transitis, rectæ sy, sy illis
SA,

Corol. 3. Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico distantia, est ad velocitatem in Circulo, in eâdem à centro distantia, in subduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam ^(u).

Corol. 4. Corporum in Ellipsis gyrationum velocitates, in mediocribus distantis ab umbilico communi, sunt eadem, quæ corporum gyrationum in Circulis ad easdem distantias; hoc est (per *Corol. 6. Prop. iv.*) reciproce in subduplicatâ ratione distantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſe cum subduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio subduplicata distantiarum inverſe ^(v).

Corol. 5. In eâdem figurâ, vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol.

sa, sa singulatim evadunt æquales. Igitur, quando hoc evenit, cum sit semper, $F : G = L \times sy : \lambda \times sy$, erit $F : G = L \times sa : \lambda \times sa$.

^(u) PUTA orbem conicum *apb* (*vide fig. text. p. 85*) in alium mutari; qui, manente umbilico *s*, orbem *apb* in vertice communi, *a*, contingat. Ita æquales fient *sa, sa*; & cum *F* semper sit ad *G* ut $L \times sa$ ad $\lambda \times sa$, (modò illæ *F, G* inter se rationem gerant, quam velocitates corporum in orbium conicorum verticibus) idcirco æquatis jam *sa, sa*, fiet $F : G = L : \lambda$. Et qualiscunque sit orbis ille conicus, quem alterum *apb* in vertice *a* contingere posuimus, dummodo umbilicum *s* verticemque *a* utrumque cum orbe *apb* communem ille habeat, manebit ea quæ exposta est proportionum similitudo; $F : G = L : \lambda$. Circulus igitur sit orbis ille conicus, qui orbem *apb* in *a* contingat, cui circulo centrum sit *s*, radius *sa*. Circulus ille pro Ellipsi haberi potest, cujus umbilicus *s*, latus autem rectum *l* transverso *2sa* æquale. Jam verò, vi formulæ generalis, *F* erit ad *G* ut *L* ad λ . Sed cum illa λ duarum *L, l* proportionem sit media, quarum *l* jam sit æqualis illi *2sa*, erit λ duarum *L, 2sa* proportionem media. Quare *F* ad *G* proportionem habet, quam *L* ad eam quæ duarum *L, 2sa* proportionem est media; sive proportionem duarum *L, 2sa* subduplicatam. Q. E. D.

^(v) SINT *apb, apb* Ellipses, (*vide fig. text. p. 85*) quarum semi-axes secundi *ca, cb*; punctis-que *p, p* ad *b, b*, vertices axium secundorum tranſatis, *sy, sy*, semi-axibus *ca, cb* æquales fient. Ac proinde, cum sit semper $F : G = L \times sy : \lambda \times sy$, fiet $F : G = L \times cb : \lambda \times cb$. Quadratum igitur ex *F* ad quadratum ex *G* rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus quadrati ex *L* ad quadratum ex *λ*, quadratque ex *cb* ad quadratum ex *cb*. Harum autem prior ea est, quam *L* habet ad *l*, sive rectangulum *ca* × *L* ad rectangulum *ca* × *l*; posterior, quam rectangulum *ca* × *l* habet ad rectangulum *ca* × *L*. Ex his autem rationibus rectanguli *ca* × *L* ad rectangulum *ca* × *l*, sive rectæ *ca* ad rectam *ca*, composita est ratio. Quadrati igitur ex *F* ad quadratum ex *G* ex eisdem illis ac rectæ *ca* ad rectam *ca* composita est ratio. Quare $F^2 : G^2 = ca : ca = sb : sb$. Hoc est *F* ad *G* rationem habebit ipsarum *sb, sb* subduplicatam. Manebit autem semper hæc proportionum similitudo, quæcunque fuerint Ellipseon *apb, apb* vel species, vel magnitudines. Manebit igitur si Ellipseon altera, puta *apb*, in Circulum migraverit, centro utique *s*, radio *sb*, scriptum. Ita verò *sb, sb* æquales fient. Quare & *F, G* inter se æquales. Eadem igitur in Ellipsis, in mediocribus distantis, quæ in Circulis, ad easdem distantias, velocitates. Q. E. D.

^(v) Ha-

Corol. 6. In Parabolâ velocitas est reciproce in subduplicatâ ratione distantie corporis ab umbilico figuræ; in Ellipsi magis variatur, in Hyperbolâ minùs quàm in hæc ratione. Nam (per *Corol. 2. Lem. xiv.*) perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in subduplicatâ ratione distantie. In Hyperbolâ perpendicularum minùs variatur, in Ellipsi magis ^(v).

Corol. 7. In Parabolâ velocitas corporis, ad quamvis ab umbilico distantiam, est ad velocitatem corporis revolvantis in Circulo, ad eandem à centro distantiam, in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbolâ major quàm in hæc ratione. Nam per hujus corollarium secundum ^(z) velocitas in vertice Parabolæ est in hæc ratione, & per corollaria sexta hujus & propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantis ^(aa). Hinc etiam in Parabolâ velocitas ubique æqualis

^(v) Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. xxxi. Cor. 2.

^(z) Tertium potius.

^(aa) PUTA orbem conicum *apb* Parabolam effe. Hanc Circulus, centro *s*, radio *sa* scriptus, in vertice *a* contingat (*vide fig. text. p. 85*). Et sit *F* ad *G* ut velocitas corporis in Parabolâ lati, in vertice ejus, ad velocitatem corporis in hoc Circulo circumacti. Sit *L* latus rectum Parabolæ, & sumatur λ , duarum *L, 2sa* proportionem media. Erit $F : G = L : \lambda$ (*Cor. 3.*) Sed $L = 4sa$ (Hamilton. Conic. Lib. II. Def. 3.) Quare $L : 2sa = 4 : 2 = 2 : 1$. Hoc est, $L^2 : \lambda^2 = 2 : 1$. Et $L : \lambda = \sqrt{2} : 1$. Habet igitur *F* ad *G*, sive velocitas corporis in Parabolâ lati in vertice *a*, ad velocitatem corporis in Circulo ad distantiam *sa* circumacti, rationem binarii ad unitatem subduplicatam. Velocitas autem corporis in Parabolâ lati, in vertice *a*, ad velocitatem corporis ejusdem in alio quovis Parabolæ loco, *p*, rationem habet rectæ *sp* ad *sa* subduplicatam (*Cor. 6.*) Et corporum, quæ, circum idem centrum *s*, ad distantias *sa, sp*, in Circulis circumagantur, eadem erit velocitatum ratio; modò corpora illa in Circulo unumquodque suo eisdem viribus centrum *s* respicientibus, quibus corpus prius in Parabolâ, retineantur (*Prop. iv. Cor. 6.*) Quare velocitas in Parabolâ in loco *p* ad velocitatem corporis in Circulo circum centrum *s*, ad distantiam *sp* circumacti, eandem rationem habebit, quam velocitas in vertice Parabolæ *a* ad velocitatem corporis in Circulo circum centrum *s*, ad distantiam *sa* circumacti; sive eam, quæ binarii ad unitatem subduplicata est.

Jam verò Ellipsis sit orbis *apb*, quam Circulus, centro *s*, radio *sa* scriptus, in vertice *a* contingat. Et sit *F* ad *G* ut velocitas corporis in Ellipsi in vertice *a* ad velocitatem in Circulo; & sit *L* latus rectum Ellipseos; λ , duarum *L, 2sa* proportionem media. Erit igitur $F : G = L : \lambda$ (*Cor. 3.*) Sed *L* minor erit quàm $4sa$ (Hamilton. Conic. Lib. II. 9 et 26.) Quare *L* minor erit, quàm ut habeat ad $2sa$ rationem eam quam 4 ad 2 , vel 2 ad 1 . Ac proinde quadratum ex *L* minus, quàm ut habeat ad quadratum ex λ rationem eam quàm 2 ad 1 . Unde rursum *L* minor quàm ut habeat ad λ rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1 . Quare & *F* minor, quàm ut habeat ad *G* rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1 . Jam capiatur punctum quodvis in Ellipsi, *p*; & sit *f* ad *F* ut velocitas corporis per Ellipsin, circum umbilicum *s*, circumacti, in loco *p*, ad velocitatem ejusdem corporis in vertice *a*. Et sit *g* ad *G* ut velocitas corporis, quod, circum centrum *s*, ad distantiam *sp*, in circulo circumagatur, ad velocitatem corporis circum *s* ad distantiam *sa* in circulo circumacti; viribus utique eisdem corpora in Ellipsi & in Circulis retinentibus. Ita erit *f* ad *g* ut velocitas in Ellipsi, in loco *p*, ad velocitatem corporis circum centrum *s*, ad distantiam *sp*, in Circulo circumacti. Jam *f* minor erit, quàm ut habeat ad *F* rationem rectæ *sa* ad *sp* subduplicatam. (*Cor. 6.*) Sed *g* ad *G* proportio-

Vol. II.

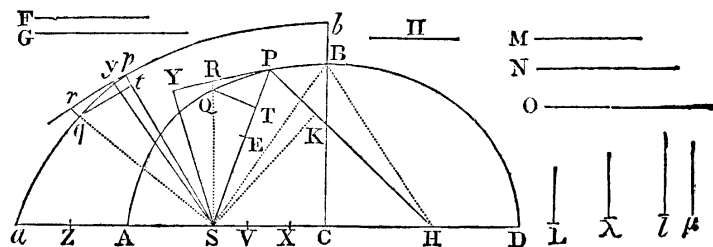
L

nm

æqualis est velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipfi minor est, in Hyperbolâ major ^(bb).

Corol. 8. Velocitas gyrantis in sectione quâvis conicâ est ad velocitatem gyrantis in Circulo, in distantia dimidii lateris recti principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. Patet per corollarium quintum ^(cc).

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyran-



tis in hoc circulo fit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciproce in subduplicatâ ratione distantiarum; fiet, ex æquo, velocitas gyrantis in conicâ sectione ad velocitatem gyrantis in cir-
culo

nem illam subduplicatam habet. (Prop. IV. Cor. 6.) Quare f minor erit, quàm ut habeat ad f proportionem eam quam g ad g . Permutando f minor erit, quàm ut habeat ad g proportionem eam quam f ad g . Sed ostensa est f minor, quàm quæ ad g proportionem haberet binarii ad unitatem subduplicatam. Quare f multo minor erit, quàm ut habeat ad g proportionem binarii ad unitatem subduplicatam. Q. E. D.

Simili argumentatione, si ponatur APB Hyperbola, ex eo quòd L major erit quàm $4SA$, ostendatur f major quàm quæ ad g , & multo magis f major quàm quæ ad g , proportionem habeat binarii ad unitatem subduplicatam. Q. E. D.

^(bb) "NAM velocitas in circulo, cujus radius $\frac{1}{2}SP$, est ad velocitatem in circulo, cujus radius SP , ut $\sqrt{2}$ ad 1 (Cor. 6. Prop. IV.) Et velocitas etiam in Parabolâ, ad distantiam SP , est ad velocitatem in Circulo, cujus radius SP , ut $\sqrt{2}$ ad 1 . Velocitas igitur in Parabolâ ad distantiam SP æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}SP$ (El. V. 9.)" [Le Sæur & Jacquier ad Locum.]

Similiter velocitas in Ellipfi, ad distantiam quamvis SP , cum minor illa sit quàm quæ habeat ad velocitatem in Circulo, ad eandem distantiam SP , rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1 , velocitate in Circulo ad distantiam $\frac{1}{2}SP$, minor erit. (El. V. 10.) Verùm in Hyperbolâ velocitas, ad distantiam quamvis SP , cum sit major quàm quæ habeat ad velocitatem in Circulo, ad eandem distantiam SP , rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1 , velocitate in Circulo ad distantiam $\frac{1}{2}SP$, illa quidem major erit. (El. V. 10.) Q. E. D.

^(cc) NAM cum dupla distantia fit latus rectum Circuli, circulus utique & orbis ille alter conicus latera recta æqualia habebunt.

^(dd) VELOCITAS in sectione conicâ APB, in loco P , est ad velocitatem in circulo, ad distantiam $\frac{1}{2}L$, ut $\frac{1}{2}L$ ad SY (Cor. 8.) Et velocitas in circulo, ad distantiam $\frac{1}{2}L$, est ad velocitatem in circulo ad distantiam SP , ut SP ad $\sqrt{SP \times \frac{1}{2}L}$. (Prop. IV. Cor. 6.) Quare, ex æquo, velocitas in orbe conico APB, in loco P , erit ad velocitatem in circulo ad distantiam SP , ut $SP \times \frac{1}{2}L$ ad $SY \times \sqrt{SP \times \frac{1}{2}L}$, five ut

culo in eâdem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semiffem principalis lateris recti sectionis, ad perpendicularum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum ^(dd).

PROP. XVII. PROB. IX.

Posito quòd vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantie locorum à centro, & quòd vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum s ea fit, quâ corpus p in orbitâ quâvis datâ, pq , gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco p . De loco p secundum lineam PR exeat corpus p cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in conicâ sectionem PQ . Hanc igitur recta PR tanget in P . Tangat itidem recta aliqua pr orbitam pq in p ; & si ab s ad eas tangentes demitti intelligantur perpendiculara, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale conicâ sectionis ad latus rectum prin-

ut $\sqrt{\frac{1}{2}L \times SP}$ ad SY . Q. E. D.

Cor. H. "In Ellipfi vel Hyperbolâ, velocitas, ad quamvis ab umbilico distantiam, ad velocitatem in Circulo, ad eandem à centro distantiam, rationem habebit distantie ab umbilico altero ad dimidium axis transversi subduplicatam."

Sit G umbilicus quem vires centripetæ respiciant. Dico velocitatem in Ellipfi vel Hyperbolâ, in loco P , ad velocitatem corporis, circum centrum O in circulo ad distantiam GP circumacti, rationem habere rectæ SP ad CA subduplicatam. Nempe cum illa PK semiffis sit lateris recti orbis conici APB (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) velocitas in orbe illo, in loco P , erit ad velocitatem in circulo cujus radius GP , ut $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH . (Cor. 9.) Verùm rectangulum $GP \times PK$ est ad quadratum ex GP ut PK ad GP ; hoc est, ut rectangulum $SP \times PK$ ad rectangulum $SP \times GP$. Quadratum autem ex GP est ad quadratum ex GH ut quadratum ex CF ad quadratum ex CB . (Hamilton. Conic. Lib. II. 31.) hoc est ut rectangulum $SP \times GP$ ad rectangulum $CA \times PK$. (Nam quadratum ex CF æquale est rectangulo $SP \times GP$; Hamilton. Conic. Lib. II. 19; & quadratum ex CB æquale est rectangulo $CA \times PK$.) Quare cum sit $GP \times PK : GP^2 = SP \times PK : SP \times GP$, & $GP^2 : GH^2 = SP \times GP : CA \times PK$; erit ex æquo $GP \times PK : GH^2 = SP : CA$. Quapropter $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH rationem habebit rectæ SP ad CA subduplicatam. Sed $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH rationem habet, quam velocitas in orbe conico APB, in loco P , ad velocitatem in circulo cujus radius GP , sicut supra ostensum est. Velocitas igitur illa ad hanc velocitatem rationem habet rectæ SP ad CA subduplicatam. Q. E. D.

Propositio hæc elegantissima à patribus doctissimis Sæurio & Jacquiero est profecta, qui tamen longè aliâ ratione eam demonstraverunt.

cipale orbitæ in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendicularum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. Sit L conici sectionis latus rectum. Datur præterea ejusdem conici sectionis umbilicus s . Anguli rps complementum ad duos rectos fiat angulus rph ; & dabitur positione linea ph , in quâ umbilicus alter h locatur^(cc). Demisso ad ph perpendicularo sk , erigi intelligatur femiaxis conjugatus bc , & erit $spq - 2kph + phq = shq$ ^(ff) $= 4chq = 4bhq - 4bcq = sp + ph : quad.$ $- L \times sp + ph = spq + 2sph + phq - L \times sp + ph$. Addantur utrobique $2kph - spq - phq + L \times sp + ph$, & fiet $L \times sp + ph = 2sph + 2kph$, seu $sp + ph$ ad ph ut $2sp + 2kp$ ad L . Unde datur ph tam longitudine quàm positione^(gg). Nimirum si ea sit corporis in p velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quàm $2sp + 2kp$, jacebit ph ad eandem partem tangentis pr cum lineâ ps ; ideoque figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis s, h , & axe principali $sp + ph$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas, ut latus rectum L æquale fuerit $2sp + 2kp$, longitudo ph infinita erit; & propterea figura erit Parabola axem habens sa parallelum lineæ pk , & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo p exeat, capienda

^(cc) Hamilton. Conic. Lib. II. 15, 16, & 17.

^(ff) El. II. 13.

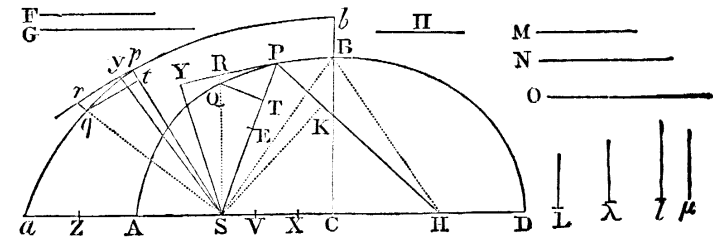
^(gg) DATIS enim punctis s, p , recta sp magnitudine & positione data est. Præterea recta sk , à dato puncto s in rectam ph , positione datam, ad perpendicularum deducta, positione ipsa dabitur. (Dat. 30.) Punctum igitur k datum (Dat. 25.) Recta igitur pk magnitudine & positione data (Dat. 26.) Duæ igitur sp, pk simul sumptæ magnitudine datæ (Dat. 3.) & $2sp, 2pk$ simul sumptæ magnitudine datæ (Dat. 2.) Sed L magnitudine data. Ratio igitur rectæ L ad $2sp \times 2pk$ data (Dat. 1.) Quare ratio rectæ ph ad $sp \times ph$ data; & dividendo, ratio ph ad sp data. Sed sp magnitudine data. Quare & ph (Dat. 2.) Et ostensa est jam antè ph positione data. Magnitudine igitur & positione.

A L I T E R.

^(hh) FACTUM puta quod propositum erat. Sit apd orbis ille conicus, quem corpus, velocitate datâ à loco p secundum rectam pr decedens, urgentibus viribus centripetis quæ umbilicum s respiciant, describere cogetur. Sectionis conicæ apd axis sit asd . A puncto p , ad angulos cum contingente pr rectos, eductam puta pe , quæ axi as in e occurrat. A puncto e in junctam sp ad perpendicularum demittatur eg . Sectionis conicæ apd , sit latus rectum L , quod magnitudine quidem dari, eodem nos quo Newtonus modo ostendamus. Hujus autem dimidio recta pg æqualis est. (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) Recta igitur pg magnitudine data est. Sed et positione (Dat. 26.) propter puncta p, s data. Punctum igitur g datum (Dat. 27.) Recta igitur ge , à dato puncto g cum rectâ pe , positione datâ, ad perpendicularum deducta, positione & ipsa dabitur (Dat. 29.) Sed & recta pe , à dato puncto p cum rectâ pr , positione datâ, ad perpendicularum deducta, positione & ipsa dabitur (Dat. 29.) Punctum igitur e datum (Dat. 25.) Datum autem s . Recta igitur se , quæ axis est sectionis conicæ apd , positione dabitur (Dat. 26.) Si igitur Parabola

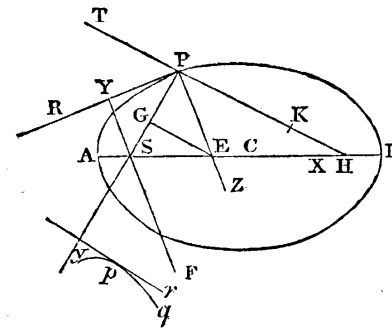
pienda erit longitudo ph ad alteram partem tangentis; ideoque

LIBER
PRIMUS.



tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentię linearum sp & ph , & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in Prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantię corporis à centro virium s reciproce; ideoque linea pq rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato p , cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam pr egrediens. Q. E. F^(hh).

Corol.



Parabola fit sectio illa, cùm umbilicum s datum habeat, & axem sa positione datum, latusque rectum L magnitudine, positione quidem ipsa dabitur. Si verò Ellipsis fit, aut Hyperbola, sectio illa conica apd , sit h umbilicus ejus alter, & jungatur ph . Jam angulus rph , si sectio sit Hyperbola, si verò illa sit Ellipsis, angulus tpk , qui cum illo rph duos rectos complet, angulo rps æqualis erit. (Hamilton. Conic. Lib. II. 16 & 17.) Angulus autem rps , qui à rectis rs, pr positione datis comprehensus est, magnitudine datus est. Angulus igitur rph datus. Recta igitur ph

quæ à dato puncto p , datâ ad rectam pr , positione datam, inclinatione est educta, positione & ipsa dabitur (Dat. 29.) Sed ostensa est sa positione data. Punctum igitur h datum (Dat. 25.) Recta igitur ph magnitudine & positione data (Dat. 26.) Sed sp data, id enim suprà ostensum est. Duarum igitur sp, ph summa vel differentia dabitur. Harum autem summæ quidem, si sectio conica apd sit Ellipsis, differentię verò, si illa sit Hyperbola, axis transversus ad est æqualis (Hamilton. Conic. Lib. II. 14.) Axis igitur transversus magnitudine datus. Quare sectio conica apd , cùm umbilicos s, h , datos habeat, axemque transversum ad magnitudine datum, positione ipsa quidem dabitur. Q. E. D.

Componemus igitur Problema hoc modo.

Sit L latus rectum orbitæ pg . Ab umbilico s in rectis pr, ps deducantur ad perpendicularum sp, sy . Et à puncto p , ad perpendicularum cum rectâ pr erigatur pz . Capitur sp , ad quam sy rationem habeat eam, quam velocitas in loco p ad velocitatem in s . Capitur etiam ad quam

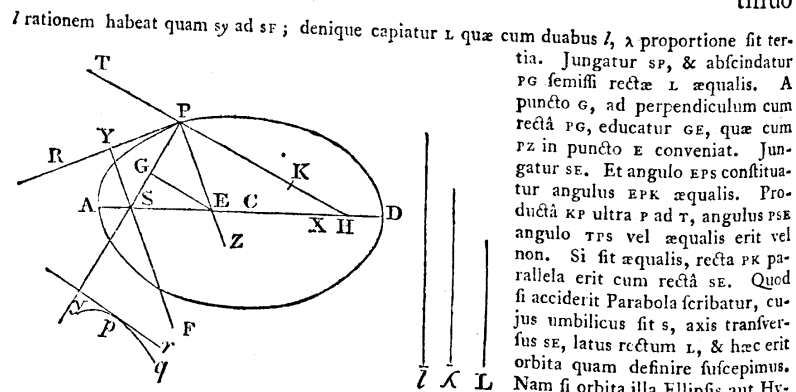
DE MOTU
CORPORUM

Corol. 1. Hinc in omni conicæ sectione ex dato vertice principali, D, latere recto, L, & umbilico, s, datur umbilicus alter H; capi-endo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS. Nam proportio SP+PH ad PH ut 2SP+2KP ad L, in casu hujus corollarii, fit DS+DH ad DH ut 4DS ad L, & divisim DS ad DH ut 4DS-L ad L.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expeditè, capi-endo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam DS, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, & ex orbe suo, impulsu quocunque, exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsu loco, secundum rectam positione datam, exhibet.

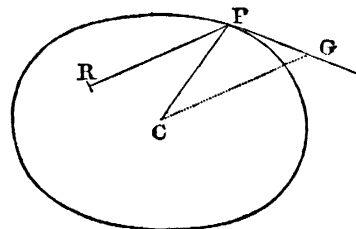
Corol. 4. Et si corpus illud, vi aliqua extrinsecus impressâ, continuò



rationem habeat quam sy ad sf; denique capiatur L quæ cum duabus l, a proportionem sit ter-
tia. Jungatur sp, & abscindatur
pg semissi rectæ l æqualis. A
puncto g, ad perpendicularum cum
rectâ pg, educatur ge, quæ cum
pz in puncto e conveniat. Jun-
gatur se. Et angulo eps constitua-
tur angulus epk æqualis. Pro-
ductâ kp ultra p ad t, angulus pse
angulo tps vel æqualis erit vel
non. Si fit æqualis, recta pk pa-
rallela erit cum rectâ se. Quod
si acciderit Parabola scribatur, cu-
jus umbilicus sit s, axis transver-
sus se, latus rectum l, & hæc erit
orbita quam definire suscepimus.
Nam si orbita illa Ellipsis aut Hy-
perbola esset, umbilicum suum al-
terum ea haberet in rectâ pk positum, quæ propterea axem se alicubi conveniret; quod angu-
lorum tps, gse inter ipsos æqualitas fieri omnino vetat. Sin verò anguli illi inæquales sint,
rectæ pk, se inter se non erunt parallelæ. Convenient igitur. Conveniant in h. Angulus gse,
dato tps, cum illi æqualis non sit, vel minor vel major erit. Si minor fuerit angulus gse,
rectæ pk, se ab iis partibus rectæ sp convenient, ad quas situs est angulus gse, & punctum e
punctis s, h intermedium erit. Si verò angulus gse angulo tps major fuerit, rectæ se, pk à
partibus rectæ sp earum, ad quas situs est angulus pse, contrariis convenient; & punctum e illis,
h, s, minimè intermedium erit. Primum quidem si acciderit, Ellipsis cujus umbilici sint s, h,
axis autem transversus duarum sp, ph summæ sit æqualis, sin verò posterius, Hyperbola, cujus
umbilici

tinuò perturbetur, innotescet cursus quàm proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex se-
riei analogiâ, mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.



Si corpus P vi centripetâ, ad punctum quodcunque datum R tendente, moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit c; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G; & vis illa (per Corol. 1. & Schol. Prop. x. & Corol. 3. Prop. VII.) erit ut $\frac{CG \text{ cub.}}{RP \text{ quad.}}$.

SECTIO IV.

De inventionem orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

umbilici sint s, h, axis autem transversus differentie duarum sp, ph æquetur, orbita erit quam definire suscepimus. Nam Parabola esse omnino illa nequit; nam si Parabola esset, recta ph cum axe se parallela esset. (Hamilton. Conic. Lib. II. 5.) Neque verò, si primum acciderit, Hyperbola; nam in hyperbolâ punctum e (concursum utique radii curvaturæ, qui dicitur, cum axe transverso) umbilicis intermedius esse nequit; neque denique, si postremum acciderit, Ellipsis erit orbita illa; nam in ellipsi concursus ille radii curvaturæ cum axe transverso non esse nequit umbilicis inter-
medius. Orbita igitur, quam definire nos oportet, si primum acciderit, Ellipsis; si posterius, Hyperbola erit, umbilicis & axibus transversis quos diximus. Quod si neutrum acciderit, anguli autem pse, tps æquales sint, orbita Parabola erit quam supra definivimus. Q. E. I.

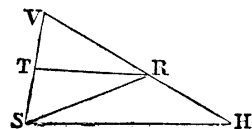
E nostrâ verò Problematis resolutione, æquè atque ex illâ Newtoni, patet, majorem minoremve corporis, in dato loco p, velocitatem illud esse, quod orbitæ cuique speciem propriam inducit. Autâ enim in loco p velocitate, cæteris manentibus, augebitur l. Autâque l augebitur semissis ejus pg. Et quo major fuerit pg, eo, propter datam quidem sp, minor erit sg. Et in triangulo pge specie dato, quâ ratione aucta fuerit pg, eadem augebitur ge. Autâ igitur velocitate (cæteris manentibus) augebitur ge, atque sg imminuetur. Et utroque nomine ratio rectæ sg ad ge, five radii ad tangentem anguli acuti gse, minor fiet. Imminutâ autem ratione illâ, angulus ipse major fiet. Major itaque corporis in loco p velocitas majorem angulum gse effecerit; crescente autem angulo gse, orbita à formâ ellipticâ in parabolicâ, & à parabolicâ in hyperbolicâ, sensim migrabit. Omnis igitur formæ ratio posita est in modo velocitatis.

Præterea è nostrâ resolutione corollaria Newtoniana faciliè deducenda sunt. Capiatur enim $dx = \frac{1}{2} l$. Jam cum recta pe angulum sph medium dividat, idcirco erit sp ad ph ut se ad eh: punctoque p per flexum orbitæ utcumque translato, hæc similitudo proportionum manebit. Igitur & ultinò manebit, si p in verticem d transferatur. Ultinò verò puncto p in d incidente, puncta g, e simul in illud x incident. Unde efficietur ds:dh=sx:xh. Quare ds:dh=ds+sx:dx. Sed ds+sx=2ds-dx, et dx= $\frac{1}{2} l$. Quare, ds:dh=2ds- $\frac{1}{2} l$: $\frac{1}{2} l$ =4ds-l:l. Hoc est ds:dh=4ds-l:l. Q. E. D.

LEMMA

L E M M A X V.

Si ab ellipses vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus s, h, ad punctum quodvis tertium, v, inflectantur rectæ duæ, sv, hv, quarum una hv æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera sv à perpendicularo tr in se demisso bisectetur in t; perpendicularum illud tr sectionem conicam alicubi tanget: & contrà, si tangit, erit hv æqualis axi principali figuræ.



Secet enim perpendicularum tr rectam hv productam, si opus fuerit, in r; & jungatur sr. Ob æquales ts, tv, æquales erunt & rectæ sr, vr, & anguli trs, trv. Unde punctum r erit ad sectionem conicam, & perpendicularum tr tanget eandem: & contrà. Q. E. D.

P R O P. XVIII. P R O B. X.

Datis umbilico & axibus principalibus, describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit s communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis trajectoriæ cujusvis; P punctum per quod trajectoria debet transire; & tr, recta quam debet tangere. Centro P, intervallo AB-SP, si orbita sit Ellipsis, vel AB+SP, si ea sit Hyperbola, describatur circulus HG. Ad tangentem tr demittatur perpendicularum st, & producat idem ad v, ut sit tv æqualis st; centroque v, & intervallo AB, describatur circulus FH. Hæc methodo, si dentur duo puncta P, p, siue duæ tangentēs tr, tr, siue punctum P & tangens tr, describendi sunt circuli duo. Sit h eorum intersectio communis, & umbilicis s, h, axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria descripta (eo quod PH+SP in Ellipsi, & PH-SP in Hyperbolâ æquatur axi) transibit per punctum P, & (per lemma superius) tanget rectam tr. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas tr, tr. Q. E. F.

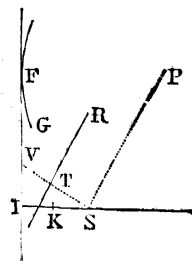
P R O P.

P R O P. XIX. P R O B. XI.

LIBER
PRIMUS.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Sit s umbilicus, P punctum, & tr tangens trajectoriæ describendæ. Centro P, intervallo ps, describe circulum FG. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem st, & produc eam ad v, ut sit tv æqualis st. Eodem modo describendus est alter circulus fg, si datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, si datur altera tangens tr;

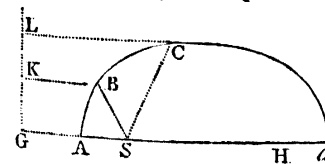


dein ducenda recta IF, quæ tangat duos circulos FG, fg, si dantur duo puncta P, p; vel transeat per duo puncta v, v, si dantur duæ tangentēs tr, tr; vel tangat circulum FG, & transeat per punctum v, si datur punctum P & tangens tr. Ad FI demitte perpendicularem si, eamque biseca in k; & axe sk, vertice principali k describatur Parabola. Dico factum. Nam parabola, ob æquales sk & ik, sp & fp, transibit per punctum P; & (per Lem. XIV. Corol. 3.) ob æquales st & tv, & angulum rectum str, tanget rectam tr. Q. E. F.

P R O P. XX. P R O B. XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie datam describere, quæ per data puncta transibit, & rectas tanget positione datas.

Cas. I. Dato umbilico s, describenda sit trajectoria abc per puncta duo B, c. Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In eâ ratione cape



KB ad BS, & LC ad CS. Centris B, c, intervallis BK, CL, describe circulos duos; & ad rectam KL, quæ tangat eosdem in k & L, demitte perpendicularum sg, idemque

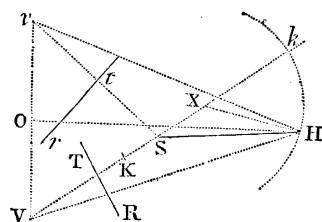
VOL. II.

M

que

que fecit in A & a, ita ut sit GA ad AS, & ga ad as, ut est KB ad BS; & axe aa, verticibus A, a, describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit GA ad AS ut ga ad as, erit divisim GA-AS, seu aa, ad as-AS, seu SH in eadem ratione; ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describendâ. Cumque sint KB ad BS & LC ad CS in eadem ratione, transibit hæc figura per puncta B, c, ut ex conicis manifestum est.

Caf. 2. Dato umbilico s, describenda sit trajectoria, quæ rectas duas TR, tr alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte



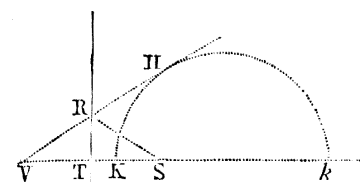
perpendicularia st, st, & produc eadem ad v, v, ut sint tv, tv æquales ts, ts. Bifeca vv in o, & erige perpendiculum infinitum oh, rectamque vs infinite productam fecit in k & k, ita ut sit vk ad ks, & vk ad ks, ut est trajectoriæ describendæ axis principalis ad umbilicorum distantiam.

Super diametro kk describatur circulus secans oh in h; & umbilicis s, h, axe principali ipsam vh æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Nam bifeca kk in x, & jungit hx, hs, hv, hv. Quoniam est vk ad ks ut vk ad ks; & compositè ut vk+vk ad ks+ks; divisimque ut vk-vk ad ks-ks, id est, ut 2vx ad 2kx & 2kx ad 2sx, ideoque ut vx ad hx & hx ad sx, similia erunt triangula vxh, hxs, & propterea vh erit ad sh ut vx ad xh, ideoque ut vk ad ks. Habet igitur trajectoriæ descriptæ axis principalis, vh, eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam, sh, quam habet trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum vh, vh æquantur axi principali, & vs, vs à rectis TR, tr perpendiculariter bisecentur, liquet (ex Lem. xv.) rectas illas trajectoriam descriptam tangere. Q. E. F.

Caf. 3. Dato umbilico s, describenda sit trajectoria, quæ rectam TR tangit in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem st, & produc eandem ad v, ut sit tv æqualis st. Junge vr, & rectam vs infinite productam fecit in k & k, ita ut sit vk ad

sk,

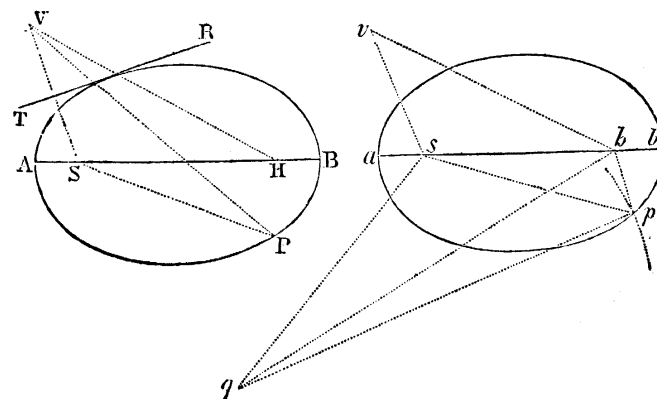
sk, & vk ad sk, ut Ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque



tiam umbilicorum; circuloque super diametro kk descripto, secetur producta recta vr in h, & umbilicis s, h, axe principali rectam vh æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Namque

vh esse ad sh ut vk ad sk, atque ideo ut axis principalis trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in casu secundo, & propterea trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describendâ, rectam verò TR, quæ angulus vrs bisecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. Q. E. F.

Caf. 4. Circa umbilicum s describenda jam sit trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, transeatque per punctum quodvis p extra tangentem datum, quæque similis sit figuræ apb, axe principali ab & umbilicis s, b descriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum st, & produc idem ad v, ut sit tv æqualis st. Angulis autem vsp, svp fac angulos bsq, sbq æquales; centroque q, & intervallo, quod sit ad ab ut sp ad vs, describe circulum secantem figuram apb in p. Junge sp, & age sh quæ sit ad sb ut est sp ad



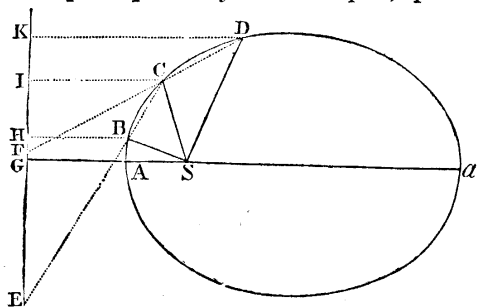
sp, quæque angulum psh angulo psb, & angulum vsh angulo psq æquales constituat. Denique umbilicis s, h, & axe principali ab distantiam vh æquante, describatur sectio conica. Dico factum.

M 2

Nam

DE MOTU
CORPORUM

Cafus ubi dantur tria puncta sic folvitur expeditiùs. Dantur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut fit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinitè productà cape GA ad AS, & Ga ad as, ut est HB ad BS; & erit A vertex, & AA axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis,



vel minor fuerit quàm AS, erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem

lineæ GF. Nam si demittantur ad GF perpendiculara CI, DK; erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc est, ut SC ad SB; & vicissim IC ad SC ut HB ad SB, five ut GA ad SA. Et simili argumento probabitur esse KD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in coni sectione circa umbilicum s ita descriptâ, ut rectæ omnes, ab umbilico s ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendiculara à punctis iisdem ad rectam GF demissa in datâ illâ ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus Problematis solutionem tradit clarissimus Geometra De la Hire, Conicorum fuorum Lib. 8. Prop. xxv.

S E C T I O V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

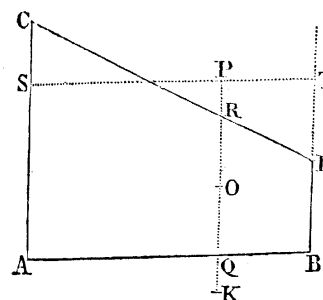
L E M M A XVII.

Si à datæ conicæ sectionis puncto quovis, P, ad trapezii alicujus, ABCD, in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinitè producta, AB, CD, AC, DB, totidem rectæ, PQ, PR, PS, PT, in datis angulis ducantur, singule ad singula: rectangulum ductarum ad opposita

fit duo latera, PQ×PR, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita, PS×PT, in datâ ratione.

LIBER
PRIMUS.

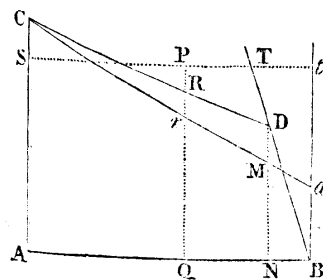
Caf. 1. Ponamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri AC, & PS ac PT lateri AB. Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta AC & BD, sibi invicem parallela. Et recta, quæ bifecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, & bifecabit etiam RQ. Sit o punctum



in quo RQ bifecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K, ut fit OK æqualis PO, & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A, B, P & K sint ad conicam sectionem, & PK fecet AB in dato angulo, erit

(per Prop. XVII, XIX, XXI & XXIII. Lib. 3. Conicorum Apollonii) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in datâ ratione. Sed QK & PR æquales sunt; utpote æqualium OK, OP, & OQ, OR differentiarum; & inde etiam rectangula PQK & PQ×PR æqualia sunt; atque ideo rectangulum PQ×PR est ad rectangulum AQB, hoc est ad rectangulum PS×PT, in datâ ratione. Q. E. D.

Caf. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita AC & BD non esse parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ st in t, tum conicæ sectioni in d.

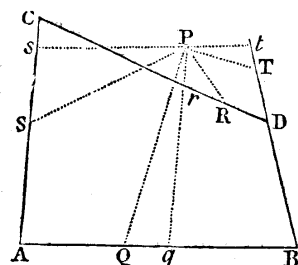


Junge cd secantem PQ in r, & ipsi PQ parallelam age DM secantem cd in M, & AB in N. Jam ob similia triangula BTt, DBN; est Bt, seu PQ, ad Tt ut DN ad NB. Sic & Rr est ad AQ, seu PS, ut DM ad AN. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes, & consequentes in

consequentes, ut rectangulum PQ in Rr est ad rectangulum PS in Tt, ita rectangulum NDM est ad rectangulum ANB, & (per Caf. 1.) ita rectangulum PQ in Pr est ad rectangulum PS in Pt,

ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$.
Q. E. D.

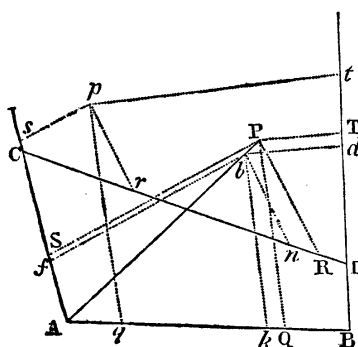
Caf. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ, PR, PS, PT , non esse parallelas lateribus AC, AB , sed ad ea utcumque inclinatas. Earum vice age Pq, Pr parallelas ipsi AC ; & Ps, Pt parallelas ipsi AB ; & propter datos angulos triangulorum PQq, PRr, PSS, PTt , dabuntur rationes PQ ad Pq , PR ad Pr , PS ad Pt , & PT ad Pt ; atque ideo rationes compositæ, $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Pt \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Pt \times Pt$ data est; ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Q. E. D.



L E M M A XVIII.

Idem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii, $PQ \times PR$, sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera, $PS \times PT$, in datâ ratione; punctum P, à quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P , puta p , concipe conicam sectionem describi: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, junge AP secantem hanc conicam sectionem alibi quàm in P , si fieri potest, puta in b . Ergo si ab his punctis, p & b , ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ pq, pr, ps, pt , & bk, bn, bf, bd ; erit ut $bk \times bn$ ad $bf \times bd$ ita (per Lem. XVII.) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem trapeziorum $bKaf, PQAS$, ut bk ad bf ita pq ad ps . Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit bn ad bd ut pr ad pt . Ergo trapezia æquiangula



æquiangula $dnbd$, $DRPT$ similia sunt, & eorum diagonales Db, DP ^{LIBER PRIMUS.} propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum AP, DP , ideoque coincidit cum puncto P . Quare punctum P , ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. Q. E. D.

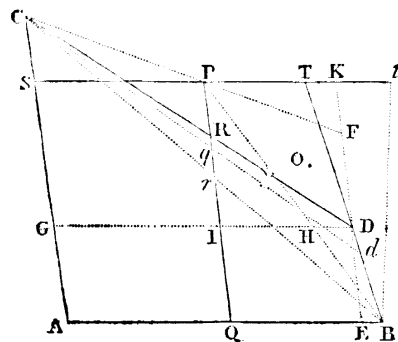
Corol. Hinc si rectæ tres, PQ, PR, PS , à puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas, AB, CD, AC , singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis, $PQ \times PR$, ad quadratum tertiæ PS in datâ ratione: punctum P , à quo rectæ ducuntur, locabitur in sectione conicâ, quæ tangit lineas AB, CD in A & C ; & contrâ. Nam coeat linea BD cum lineâ AC , manente positione trium AB, CD, AC ; dein coeat etiam lineâ PT cum lineâ PS : & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS quad. rectæque AB, CD , quæ curvam in punctis A & B, C & D secabant, jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangunt.

Scholium.

Nomen conicæ sectionis in hoc Lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea, per verticem conici transiens, quam circularis, basi parallela, includatur. Nam si punctum p incidit in rectam, quâ puncta A & D , vel C & B , junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum p incidit, & altera est recta, quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquantur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera ejus, vel perpendiculariter, vel in angulis quibuscvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis, $PQ \times PR$, æquale rectangulo sub duabus aliis, $PS \times PT$, sectio conica evadet circulus. Idem fiet, si lineæ quatuor ducantur in angulis quibuscvis, & rectangulum sub duabus ductis, $PQ \times PR$, sit ad rectangulum sub aliis duabus, $PS \times PT$, ut rectangulum sub sinibus angulorum, s, t , in quibus duæ ultimæ, PS, PT , ducuntur, ad rectangulum sub sinibus angulorum, Q, R , in quibus duæ primæ, PQ, PR , ducuntur. Cæteris in casibus locus puncti P erit aliqua trium figurarum, quæ vulgò nominantur sectiones conicæ. Vice autem trapezii $ABCD$ substituti

contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum D tanget sectionem conicam per puncta quatuor A, B, C, P transeuntem.

Caf. 1. Jungantur BP, CP, & à puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipsi AB parallela sit, & occurrat PB, PQ, CA, in H, I, G; altera DE parallela sit ipsi AC, & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per Lem. XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione datâ. Sed est PQ ad DE (seu IQ) ut PB ad HB, ideoque ut PT ad DH; & vicissim PQ ad PT ut DE ad DH. Est & PR ad DF ut RC ad DC, ideoque ut (IG vel) PS ad DG, & vicissim PR ad PS ut DF ad DG; & conjunctis rationibus, fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur PQ & PS, & propterea ratio PR ad PT datur. Q. E. D.



Caf. 2. Quod si PR et PT ponantur in datâ ratione ad invicem, tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione datâ; ideoque punctum D (per Lem. XVIII.) contingere conicam sectionem transeuntem per puncta A, B, C, P. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si agatur BC secans PQ in r, & in PT capiatur PT in ratione ad PR quam habet PT ad PR: erit BT tangens conicæ sectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut, chordâ BD evanescente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB et BT.

Corol. 2. Et vice versâ si BT sit tangens, & ad quodvis conicæ sectionis punctum D convenient BD, CD; erit PR ad PT ut PR ad PT. Et contra, si sit PR ad PT ut PR ad PT; convenient BD, CD ad conicæ sectionis punctum aliquod D.

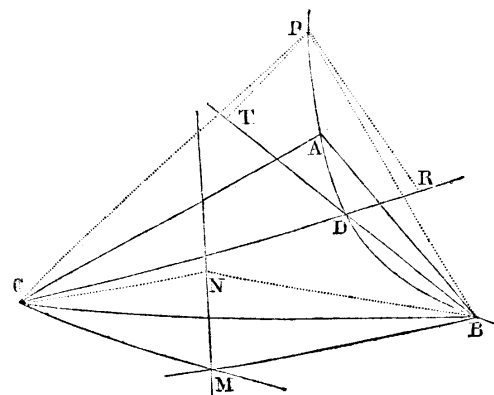
Corol. 3. Conica sectio non secat conicam sectionem in punctis pluribus

pluribus quàm quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ conicæ sectiones per quinque puncta A, B, C, P, O; easque secet recta BD in punctis D, d, & ipsam PQ secet recta cd in q. Ergo PR est ad PT ut PQ ad PT; unde PR & PQ sibi invicem æquantur, contra hypothefin.

L E M M A XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ, BM, CM, per data puncta, B, C, ceu polos ductæ, concursu suo, M, describant tertiam positione datam rectam, MN; & aliæ duæ infinitæ rectæ, BD, CD, cum prioribus duabus ad puncta illa data B, C datos angulos, MBD, MCD, efficientes ducantur: dico, quod hæ duæ, BD, CD, concursu suo, D, describent sectionem conicam per puncta B, C transeuntem. Et vice versâ, si rectæ BD, CD concursu suo D describant sectionem conicam per puncta data B, C, A transeuntem, & sit angulus DBM semper æqualis angulo dato ABC, angulisque DCM semper æqualis angulo dato ACB: punctum M continget rectam positione datam.

Nam in rectâ MN detur punctum N, & ubi punctum mobile



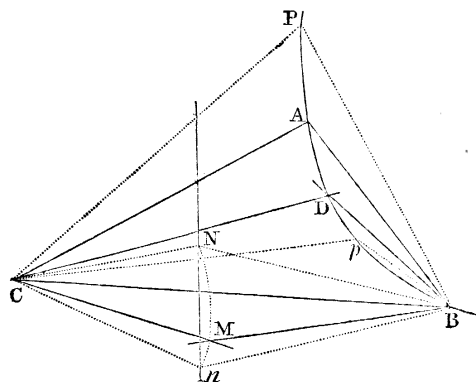
M incidit in immotum N, incidat punctum mobile D in immotum P. Junge CN, BN, CP, BP, & à puncto P age rectas PT, PR occurrentes ipsis BD, CD in T & R, & facientes angulum BPT æqualem angulo dato BNM, & angulum CPR æqualem angulo dato CNM.

Cum ergo (ex hypothefi) æquales sint anguli MBD, NBP, ut & anguli MCD, NCP; aufer communes NBD & NCD, & restabunt æquales NBM & PBT, NCM & PCR: ideoque triangula NBM, PBT similia sunt, ut & triangula NCM, PCR. Quare PT est ad NM ut PB ad NB, & PR ad NM ut PC ad NC. Sunt autem puncta B, C, N, P

DE MOTU
CORPORUM

N, P immobilia. Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM, proindeque datam rationem inter se; atque ideo (per Lem. xx.) punctum D, perpetuus rectorum mobilium BT & CR concursus, contingit sectionem conicam, per puncta B, c, P transeuntem. Q. E. D.

Et contra, si punctum mobile D contingat sectionem conicam transeuntem per data puncta B, c, A, & sit angulus DBM semper æqualis angulo dato



angulo dato ABC, & angulus DCM semper æqualis angulo dato ACB, & ubi punctum D incidit successivè in duo quævis sectionis puncta immobilia p, P, punctum mobile M incidat successivè in puncta duo immobilia n, N: per eadem n, N agatur recta nN, & hæc erit locus perpetuus puncti

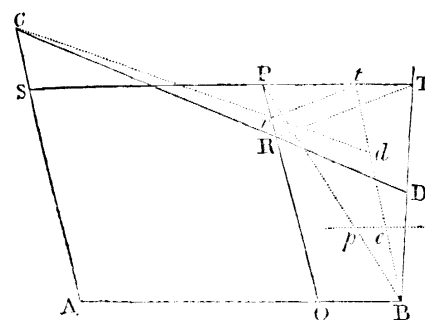
illius mobilis M. Nam, si fieri potest, versetur punctum M in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum D sectionem conicam per puncta quinque B, c, A, p, P transeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum D sectionem conicam per eadem quinque puncta B, c, A, p, P, transeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lemmat. xx. Igitur punctum M versari in lineâ curvâ absurdum est. Q. E. D.

PROP. XXII. PROB. XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque, A, B, c, P, D. Ab eorum aliquo, A, ad alia duo quævis, B, c, quæ poli nominentur, age rectas AB, AC; hisque parallelas TFS, PRQ per punctum quartum P. Deinde à polis duobus B, c age per punctum quintum, D, duas BDT, CRD, novissimè ductis, TFS, PRQ, (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in T & R. Denique de rectis PT, PR, actâ rectâ tr ipsi

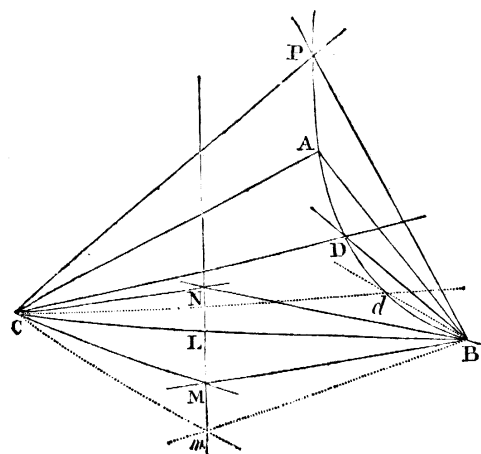
ipsi TR parallelâ, abscinde quasvis Pt, Pr ipsi PT, PR proportio-
nales; & si per earum terminos, t, r, & polos B, c actæ Bt, cr



concurrant in d, locabitur punctum illud d in trajectoriâ quæsitâ. Nam punctum illud d (per Lem. xx.) versatur in conicâ sectione per puncta quatuor A, B, c, P transeunte; & lineis rr, tt evanescentibus, coit punctum d cum puncto D. Transfit ergo sectio conica

per puncta quinque A, B, c, P, D. Q. E. D.

Idem aliter.



E punctis datis junga tria quævis, A, B, c; & circum duo eorum, B, c, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB, applicentur crura BA, CA primò ad punctum D, deinde ad punctum P, & notentur puncta M, N in quibus altera crura BL, CL casu utroque se decussant. Agatur recta infinita

MN, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B, c, eâ lege, ut crurum, BL, CL, vel BM, CM, intersectio, quæ jam sit m, incidat semper in rectam illam infinitam MN; & crurum BA, CA, vel BD, CD, intersectio, quæ jam sit d, trajectoriam quæsitam PADDB delineabit. Nam punctum d (per Lem. xxi.) continget sectionem conicam per puncta B, c transeuntem; & ubi punctum m accedit ad puncta L, M, N, punctum d (per constructionem) accedet ad puncta A, D, P. Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque A, B, c, P, D. Q. E. F.

Corol.

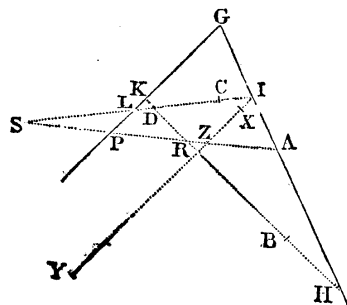
ter PI & IC ; & erit A punctum contactûs. Nam si rectæ PI parallela HX trajectoriam fecet in punctis quibufvis, x & y : erit (ex conicis) punctum A ita locandum, ut fuerit HA quad. ad AI quad. in ratione composita ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD , seu rectanguli CGP ad rectangulum DGB , & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC . Invento autem contactûs puncto A , describetur trajectoria ut in casu primo. Q. E. F.

Capi autem potest punctum A vel inter puncta H & I, vel extra; & perinde trajectory dupliciter describi.

P R O P. XXIV. P R O B. XVI.

Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes HI, KL, & puncta B, C, D. Per punctorum duo quævis, B, D, age rectam infinitam, BD, tangentibus occurrentem in punctis H, K. Deinde etiam per alia duo quævis, C, D, age infinitam CD tangentibus occurrentem in punctis I, L. Actas ita fecit in R & S, ut sit HR ad KR ut est media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD; & IS ad LS ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL & LD. Seca autem pro lubitu vel inter puncta K & H, I & L, vel extra eadem; dein age RS secantem tangentes in A & P, & erunt A & P puncta contactuum. Nam si A & P supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum H, I, K, L quodvis I, in tangente alterutrâ HI



fitum, agatur recta IV tangenti alteri KL parallela, quæ occurrat curvæ in x & Y , & in eâ fumatur IZ media proportionalis inter IX & IY : erit, ex conicis, rectangulum XIY , seu IZ *quad.* ad LP *quad.* ut rectangulum CID ad rectangulum CLD , id est (per constructionem) ut SI *quad.* ad SL *quad.* atque ideo IZ ad LP ut SI ad SL . Jacent ergo puncta

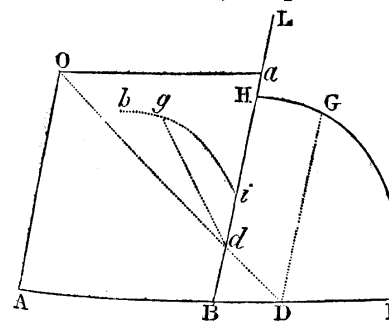
puncta s, p, z in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in G, erit (ex conicis) rectangulum XIV, seu IZ *quad.* ad IA *quad.* ut GP *quad.* ad GA *quad.* ideoque IZ ad IA ut GP ad GA. Jacent ergo puncta p, z & A in unâ rectâ; ideoque puncta s, p & A sunt in unâ rectâ. Et eodem argumento probabitur quod puncta R, p & A sunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum A & p in rectâ RS. Hisce autem inventis, trajectory describetur ut in casu primo Problematis superioris. Q. E. F.

In hac Propositione, & casu secundo Propositionis superioris, constructiones eædem sunt, siue recta xy trajectoriam fecet in x & y , siue non fecet; eæque non pendent ab hac sectione. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam fecat, innotescunt constructiones, ubi non fecat; iisque ultra demonstrandis, brevitatis gratiâ, non immoror.

L E M M A XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

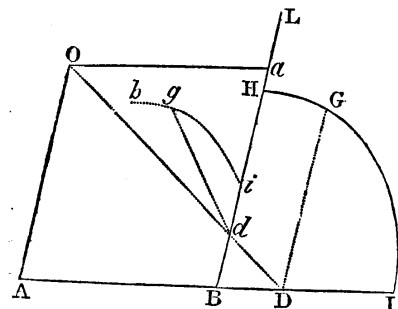
Transmutanda sit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ, AO, BL, tertiam quamvis positione datam, AB, secantes in A & B; & à figuræ puncto quovis, G, ad rectam AB ducatur quævis GD, ipsi OA parallela. Deinde à puncto aliquo O, in lineâ OA dato, ad punctum D ducatur recta OD, ipsi BL oc-



The diagram shows a geometric construction on a horizontal base line A-I. Point B lies on segment AI. A vertical line BL rises from B. A curve OD starts at O and ends at D on the base line. A second curve BG starts at B and ends at G on the curve OD. A point g is located on the curve BG. Lines are drawn connecting O to B and O to D. Another set of lines connects O to various points on the curves, including b and g on the inner curve, and i and d on the outer curve. The diagram illustrates how the area between the curves and the base line is divided into corresponding parts by these lines.

natam novam; AD abscissam primam, *ad* abscissam novam; o polum, OD radium abscindentem, OA radium ordinatum primum, & *oa* (quo parallelogrammum OAB α completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quòd, si punctum *g* tangit rectam lineam positione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam positione datam. Si punctum *g* tangit conicam sectionem, punctum *g* tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annuero. Porro si punctum *g* tangit lineam tertii ordinis analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis analytici quas puncta *g*, *g* tangunt. Etenim ut est *ad* ad OA ita sunt *od* ad OD, *dg* ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum *g* tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quavis, quâ relatio inter abscissam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producet



æquatio nova; in quâ abscissâ nova, *ad*, & ordinata nova, *dg*, ad unicam tantum dimensionem ascendunt, atque ideo quæ designat lineam rectam. Sin AD & DG, vel earum alterutra, ascendebant ad duas dimensiones in æquatione primâ, ascendunt itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione secundâ. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ, *ad*, *dg*, in æquatione secundâ, & AD, DG in prima, ascendunt semper ad eundem dimensionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta *g*, *g* tangunt, sunt ejusdem ordinis analytici.

Dico præterea, quòd si recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta, eodem modo cum curvâ in figuram novam translata, tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contra. Nam si curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem &

coeunt in figurâ primâ, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi possent harum assertionum demonstrationes more magis geometrico. Sed brevitati consulo.

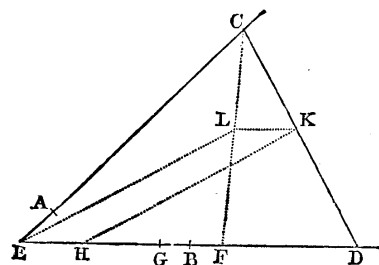
Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, à quibus conflatur, intersectiones transferre, & per easdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvileam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & aliæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelae sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem Problema solvitur in figurâ novâ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsitâ.

Utile est etiam hoc Lemma in solutione solidorum Problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si Hyperbola sit vel Parabola, in Ellipsin: deinde Ellipsis facile mutatur in Circulum. Rectam item & sectio conica, in constructione planorum Problematum, vertuntur in rectam & circulum.

PROP. XXV. PROB. XVII.

Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.

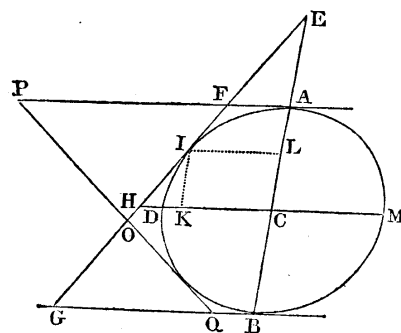
Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertie cum rectâ illâ, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per Lemma superius, in figuram novam. In hac figurâ tangentes illæ duæ evadent sibi invicem



L E M M A XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni sectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico, quòd sectionis semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter barum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interseccta.

Sunto AF, GB parallelæ duæ coni sectionem ADB tangentes in A & B; EF recta tertia coni sectionem tangens in I, & occurrens prioribus tangentibus in F & G; sitque CD semidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quòd AF, CD, BG sunt continuè proportionales.



Nam si diametri conjugatæ AB, DM tangenti FG occurrant in E & H, seque mutuò secant in c, & compleatur parallelogrammum IKCL; erit, ex naturâ sectionum conicarum, ut EC ad CA ita CA ad CL, & ita divisim EC-CA ad CA-CL, seu EA ad AL, & compositè EA ad EA+AL, seu EL, ut EC ad EC+CA, seu EB; ideoque, ob similitudinem triangulorum EAF, ELI, ECH, EBG, AF ad LI ut CH ad BG. Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum, LI seu CK ad CD ut CD ad CH; atque ideo ex æquo perturbatè AF ad CD ut CD ad BG. Q. E. D.

Corol. I. Hinc si tangentes duæ FG, PQ tangentibus parallelis

AF,

erit semper ELKH parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK. Q. E. D.

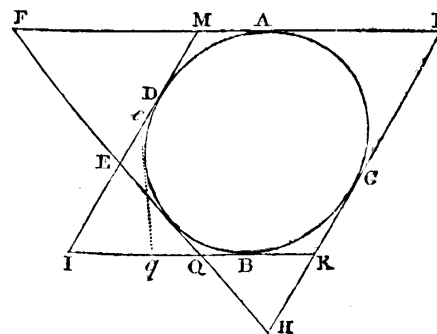
Corol. Ob datam specie figuram EFLC, rectæ tres EF, EL & EC, id est, GD, HK & EC, datas habent rationes ad invicem.

AF, BG occurrant in F & G, P & Q, seque mutuò secant in O; ^{LIBER PRIMUS.} erit ex æquo perturbatè AF & BQ ut AP ad BG, & divisim ut FP ad GQ, atque ideo ut FO ad OG.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ, FG, FQ, per puncta P & G, F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum figuræ & puncta contactuum, A, B, transeuntem.

L E M M A XXV.

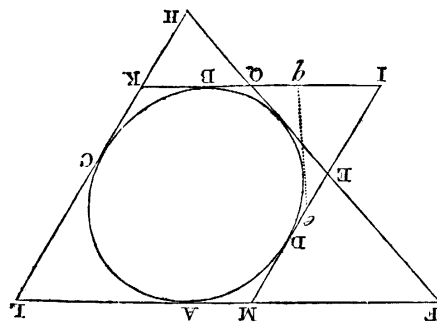
Si parallelogrammi latera quatuor infinitè producta tangant sectionem quamcunque conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico, quòd abscissa alterutra sit ad latus illud à quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini, inter punctum contactus & latus tertium, est ad abscissarum alteram.



Tangent parallelogrammi MLIK latera quatuor, ML, IK, KL, MI, sectionem conicam in A, B, C, D; & secet tangens quinta, FQ, hæc latera in F, Q, H & E; sumantur autem laterum MI, KI abscissæ ME, KQ, vel laterum KL, ML abscissæ KH, MF: dico, quòd sit ME ad MI ut BK

ad KQ; & KH ad KL ut AM ad MF. Nam per corollarium primum Lemmatis superioris est ME ad EI ut AM, seu BK, ad BQ; & componendo, ME ad MI ut BK ad KQ. Q. E. D. Item KH ad HL ut BK, seu AM, ad AF; & dividendo, KH ad KL ut AM ad MF. Q. E. D.

Corol. I. Hinc si datur parallelogrammum IKLM, circa datam sectionem conicam descriptum, dabitur rectangulum KQ×ME, ut & hinc æquale rectangulum KH×MF. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum KQH, MFE.



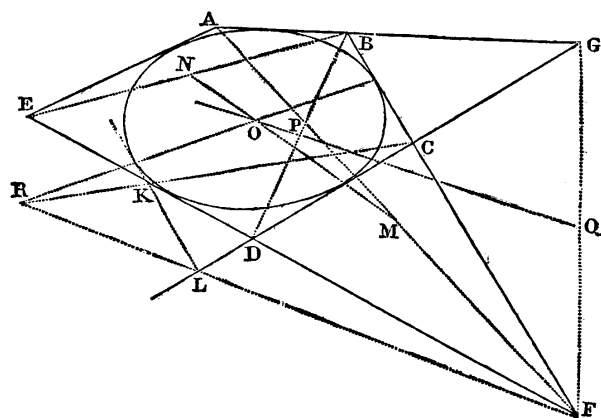
Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens, eq , tangentibus KI, MI occurrens in q & e ; rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque KQ ad Me ut Kq ad ME , & divisim ut Qq ad Ee .

Corol. 3. Unde etiam si eq, eq jungantur & bise-centur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum sectionis conicæ. Nam cum sit Qq ad Ee ut KQ ad Me , transibit eadem recta per medium omnium eq, eQ, MK (per Lem. XXIII.) & medium rectæ MK est centrum sectionis.

P R O P. XXVII. P R O B. XIX.

Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas continget.

Dentur positione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA . Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibuscunque contentæ, $ABFE$, diagonales, AF, BE , bisectiones in M & N , & (per Corol. 3. Lem. XXV.) recta MN , per



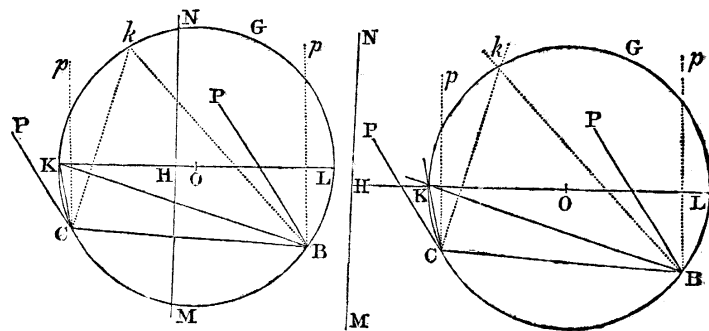
puncta

puncta bisectionum acta, transibit per centrum trajectoriæ. Rur-^{LIBER PRIMUS.} fus figuræ quadrilateræ, $BGDF$, sub aliis quibuscunque quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD, GF bisectiones in P & Q : & recta PQ , per puncta bisectionum acta, transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisectionum. Sit illud O . Tangenti cuivis, BC , parallelam age KL , ad eam distantiam, ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas, GCD, FDE , in L & K . Per harum tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concursus, C & K, F & L , age CK, FL concurrentes in R , & recta OR ducta & producta fecabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per construct. Prob. XIV. trajectoriam describere. Q. E. F.

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus unâ cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atque constructiones Problematum præcedentium vertentur in constructiones ubi Asymptotos datur.

Postquam trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hæc methodo. In constructione & figurâ Lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura, BP, CP , quorum concursu trajectoria describebatur, sunt sibi invicem parallela, eumque servantia situm revolvantur circa polos suos B, C in figurâ illâ. Interea verò describant altera angulorum illorum crura, CN, BN , concursu suo K vel k , circulum $BGKC$. Sit circuli hujus centrum O . Ab hoc centro ad regulam MN , ad quam altera illa crura, CN, BN , interea concurrebant, dum trajectoria describebatur demitte normalem OH circulo occurrentem in K & L . Et ubi



crura illa altera CK, BK concurrunt ad punctum illud K, quod regulæ propius est, crura prima, CP, BP, parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde si detur trajectoryæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium verò quadrata sunt ad invicem ut KH ad LH, & inde facile est trajectoryam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituentur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles, PCK, PBK; his autem datis deferibi potest circulus BGKC. Tum, ob datam specie trajectoryam, dabitur ratio OH ad OK, ideoque ipsa OH. Centro O, & intervallo OH, describe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & transiit per concursum crurum CK, BK, ubi crura prima, CP, BP, concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa MN, cujus ope trajectorya describetur. Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in datâ quâvis sectione conicâ inscribi potest.

Sunt & alia Lemmata, quorum ope trajectoryæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam conicæ sectionem in punctis duobus interfecet, & intersectionum intervallum bisequetur, punctum bisectionis tanget aliam conicæ sectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propere ad magis utilia.

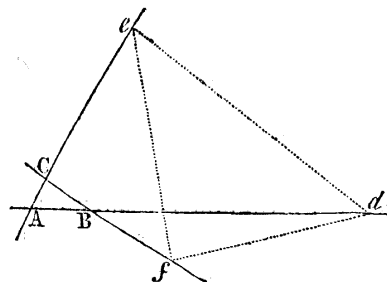
L E M M A.

L E M M A XXVI.

LIBER
PRIMUS.

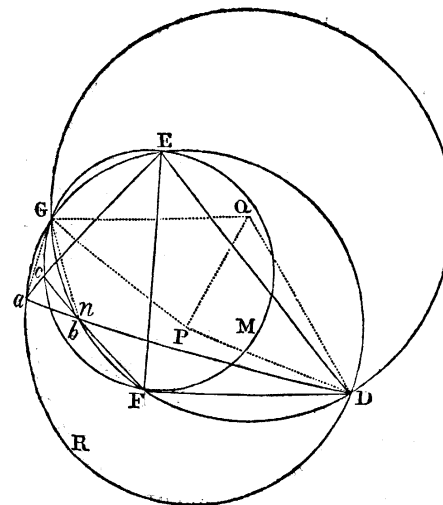
Trianguli, specie & magnitudine dati, tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallele, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC, & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB, angulus



E lineam AC, & angulus F lineam BC tangat. Super DE, DF & EF describe tria circulorum segmenta DRE, DGF, EMF; quæ capiant angulos angulis BAC, ABC, ACB æquales respectivè. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum DE, DF,

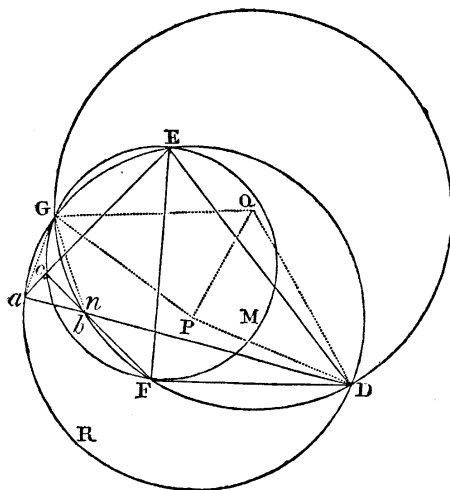
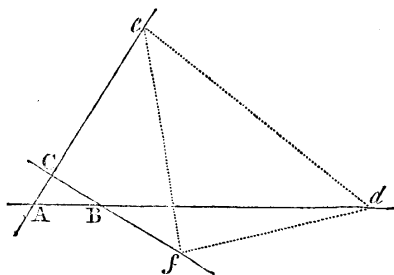
EF, ut literæ D, R, E, D eodem ordine cum literis B, A, C, B; literæ D, G, F, D eodem cum literis A, B, C, A; & literæ E, M, F, E eodem cum literis A, C, B, A in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in G, sintque centra eorum P & Q. Jungtis GP, PQ, cape Ga ad AB ut est GP ad PQ; & centro G, intervallo Ga, describe



circulum, qui secet circulum primum, DGE, in a. Jungatur ad ad secans circulum secundum, DFG, in b, tum ae secans circulum tertium, EMF, in c. Et jam licet figuram ABCdef constitueret.

stituere similem & æqualem figuræ $abcDEF$. Quo facto perficitur Problema.

Agatur enim fc ipsi ad occurrens in n , & jungantur ag , bg ,



gg , qd , pd . Ex constructione est angulus ead æqualis angulo cab , & angulus acf æqualis angulo acb , ideoque triangulum anc triangulo abc æquiangulum. Ergo angulus anc , seu fnD , angulo abc , ideoque angulo fbD æqualis est; & propterea punctum n incidit in punctum b . Porro angulus gpQ , qui dimidius est anguli ad centrum gpd , æqualis est angulo ad circumferentiam cad ; & angulus gqp , qui dimidius est anguli ad centrum gqp , æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam cbd , ideoque æqualis angulo gba ; suntque ideo triangula gpQ , gab similia; & ga est ad ab ut gp ad pQ ; id est (ex constructione) ut ga ad ab . Æquantur itaque ab & AB ; & propterea triangula abc , ABC , quæ modò similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli DEF anguli, D , E , F trianguli abc latera ab , ac , bc , respectivè, compleri potest figura $abcDEF$ figuræ $abcDEF$ similis & æqualis, atque eam complendo solvetur Problema. Q. E. F.

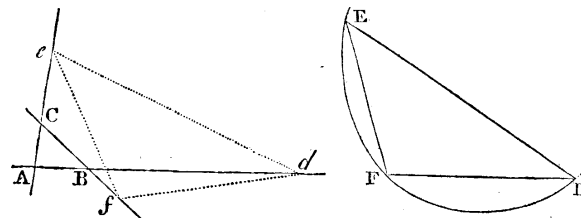
Corol. Hinc recta duci potest, cujus partes, longitudine datæ, rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum DEF , puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE , DF in directum

rectum positus, mutari in lineam rectam, cujus pars data, DE , rectis positione datis AB , AC , & pars data, DF , rectis positione datis AB , BC , interponi debet; & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur Problema.

P R O P. XXVIII. P R O B. XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus, positione datis, interjacebunt.

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis & æqualis lineæ cur-



væ DEF , quæque à rectis tribus, AB , AC , BC , positione datis, in partes datis hujus partibus, DE & EF , similes & æquales secabitur. Age rectas DE , EF , DF , & trianguli hujus, DEF , pone angulos D , E , F ad rectas illas positione datas (per Lem. XXVI.) dein circa triangulum describe trajectoriam curvæ DEF similis & æqualem. Q. E. F.

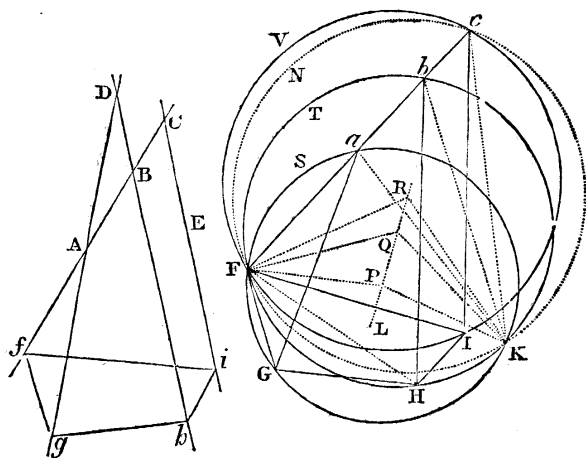
L E M M A XXVII.

Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistant.

Dentur positione rectæ quatuor, ABC , AD , BD , CE ; quarum prima secet secundam in A , tertiam in B , & quartam in C : & describendum sit trapezium $fgbi$, quod sit trapezio $FGHI$ simile; & cujus angulus f , angulo dato F æqualis, tangat rectam ABC ; cæterique anguli g , b , i , cæteris angulis datis G , H , I æquales, tangant cæteras lineas AD , BD , CE respectivè. Jungatur FH , & super FG , FH , FI describantur totidem circulorum segmenta FSG , FTH ,

DE MOTU
CORPORUM

FVI; quorum primum FSG capiat angulum æqualem angulo BAD; secundum FTH capiat angulum æqualem angulo CBD; ac tertium



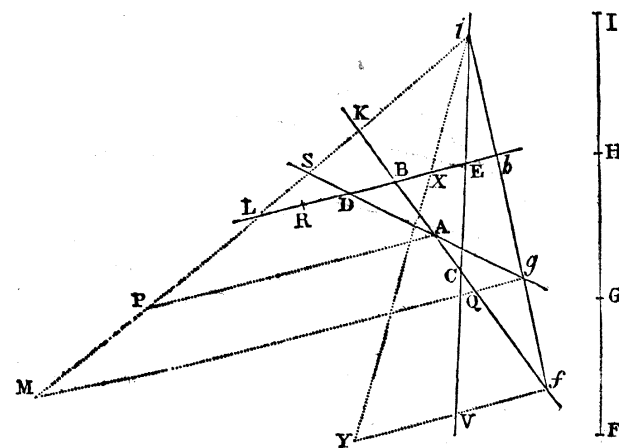
FVI capiat angulum æqualem angulo ACE. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum FG, FH, FI, ut literarum F, S, G, F idem sit ordo circularis, qui literarum B, A, D, B; utque literæ F, T, H, F eodem ordine cum literis C, B, D, C; & literæ F, V, I, F eodem cum literis A, C, E, A in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros, fitque P centrum circuli primi FSG, & Q centrum secundi FTH. Jungatur & utrinque producatu PQ, & in eâ capiatur QR, in eâ ratione ad PQ, quam habet BC ad AB. Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q, ut literarum P, Q, R idem sit ordo atque literarum A, B, C: centroque, R & intervallo RF, describatur circulus quartus, FNC, secans circulum tertium, FVI, in C. Jungatur FC secans circulum primum in a, & secundum in b. Agantur aG, bH, cI, & figuræ abCFGHI similis constitui potest figura ABCFGHI. Quo facto erit trapezium fgbi illud ipsum, quod constituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi, FSG, FTH, se mutuò in K. Jungantur PK, QK, RK, AK, BK, CK, & producatu QP ad L. Anguli ad circumferentias, FAK, FBK, FCK, sunt semiffes angulorum FPK, FQK, FRK ad centra; ideoque angulorum illorum dimidiis, LPK, LQK,

LQK, LRK, æquales. Est ergo figura PQRK figuræ abCK æquian-^{LIBER PRIMUS.}gula & similis; & propterea ab est ad bc ut PQ ad QR, id est, ut AB ad BC. Angulis insuper FAG, FBH, FCI æquantur fAg, fBb, fci, per constructionem. Ergo figuræ abCFGHI figura similis ABCfgbi compleri potest. Quo facto trapezium fgbi constituetur simile trapezio FGHI, & angulis suis, f, g, b, i, tanget rectas ABC, AD, BD, CE. Q. E. F.

Corol. Hinc recta duci potest, cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI usque eo, ut rectæ FG, GH, HI in directum jaceant; & in hoc casu, construendo Problema, ducetur recta fgbi, cujus partes, fg, gb, bi, rectis quatuor positione datis, AB & AD, AD & BD, BD & CE, interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem verò sic fit expeditius.

Producantur AB ad K, & BD ad L, ut sit BK ad AB ut HI ad GH; & DL ad BD ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i.

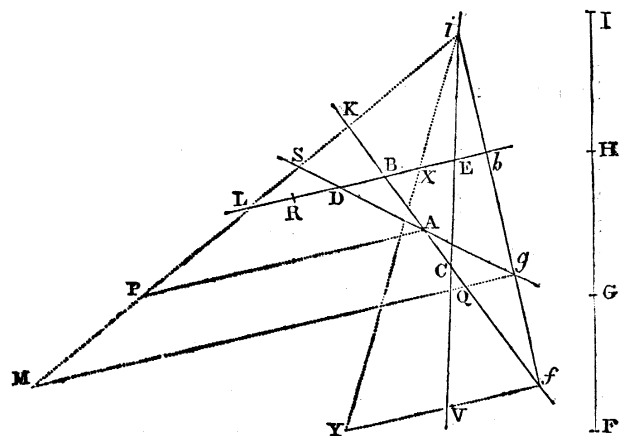


Producatur iL ad M, ut sit LM ad iL ut GH ad HI, & agatur tum MQ ipsi LB parallela, rectæque AD occurrens in g, tum gi secans AB, BD in f, b. Dico factum.

Secet enim Mg rectam AB in Q; & AD, rectam KL in s; & agatur

gatur AP, quæ sit ipsi BD parallela, & occurrat iL in P; & erunt gM ad Lb (gi ad bi , Mi ad Li , GI ad HI , AK ad BK) & AP ad BL in eadem ratione. Secetur DL in R, ut sit DL ad RL in eadem illâ ratione; & ob proportionales gs ad gM , AS ad AP, & DS ad DL, erit, ex æquo, ut gs ad Lb ita AS ad BL, & DS ad RL; & mixtim, BL-RL ad Lb -BL ut AS-DS ad gs -AS. Id est, BR ad Bb ut AD ad AG, ideoque ut BD ad gQ . Et vicissim, BR ad BD ut Bb ad gQ , feu fb ad fg . Sed, ex constructione, linea BL eadem ratione secta fuit in D & R, atque linea FI in G & H: ideoque est BR ad BD ut FH ad FG. Ergo fb est ad fg ut FH ad FG. Cum igitur sit etiam gi ad bi ut Mi ad Li , id est, ut GI ad HI, patet lineas FI, fi , in g & b , G & H, similiter sectas esse. Q. E. F.

In constructione Corollarii hujus, postquam ducitur LK fecans.



CE in i , producere licet ie ad v , ut sit EV ad Ei ut FH ad HI, & agere vf parallelam ipsi BD. Eodem recidit si centro i , intervallo IH, describatur circulus fecans BD in X, & producat ix ad Y, ut sit iy æqualis IF, & agatur yf ipsi BD parallela.

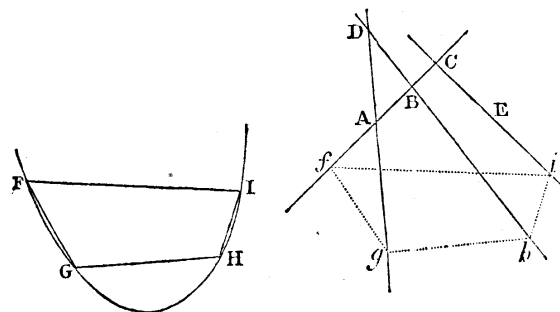
Problematis hujus solutiones alias Wrennus & Wallisus olim excogitarunt.

P R O P.

P R O P. XXIX. P R O B. XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ à rectis quatuor, positione datis, in partes secabitur, ordine, specie & proportionem datas.

Describenda sit trajectoria, quæ similis sit lineæ curvæ FGHI, & cujus partes, illius partibus FG, GH, HI fimiles & proportionales, rectis AB & BD, AD & BD, BD & CE positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis



FG, GH, HI, FI, describatur (per Lem. XXVII.) Trapezium $fgbi$ quod sit trapezio FGHI simile, & cujus anguli f, g, b, i tangent rectas illas positione

datas AB, AD, BD, CE, singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectoria curvæ lineæ FGHI confimilis.

Scholium.

Construi etiam potest hoc Problema ut sequitur. Junctis FG, GH, HI, FI, producat GF ad V, jungetque FH, IG, & angulis FGH, VFH fac angulos CAK, DAL æquales. Concurrent AK, AL cum rectâ BD in K & L, & inde agantur KM, LN; quarum KM constituat angulum AKM æqualem angulo GHI, sitque ad AK ut est HI ad GH; & LN constituat angulum ALN æqualem angulo FHI, sitque ad AL ut HI ad FH. Ducantur autem AK, KM, AL, LN ad eas partes linearum AD, AK, AL, ut literæ C, A, K, M, C; A, L, K, A; D, A, L, N, D; eodem ordine cum literis F, G, H, I, F in orbem redeant; & acta MN occurrat rectæ CE in i . Fac angulum iep æqualem angulo IGF; sitque PE ad Ei ut FG ad GI; & per P agatur PQf, quæ cum rectâ ADE contineat angulum PQE æqualem angulo FIG, rectæque AB occurrat in f , & jungatur fi . Agantur autem PE ad PQ, ad eas partes linearum CE, PE, ut literarum P, E, i , P & P, E, Q, P idem sit ordo circularis qui literarum F, G, H, I, F; & si super lineâ fi , eodem quoque

A & perpendicularum ad axem ab umbilico s erectum (d).

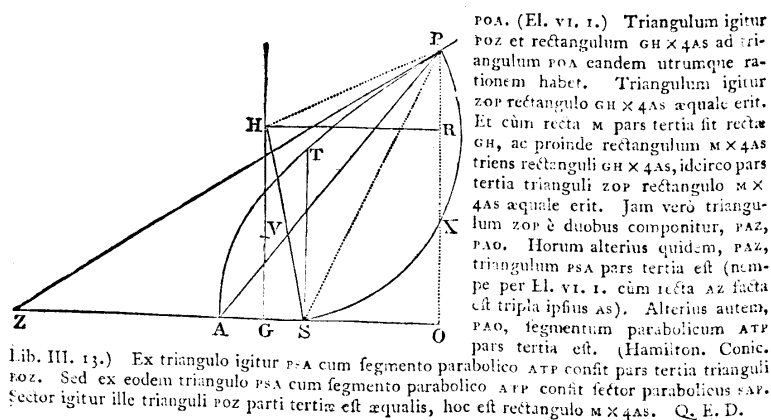
Corol. 2. Et circulo ASP per corpus motum p perpetuò transeunte, velocitas puncti H est ad velocitatem, quam corpus habuit in vertice A, ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione est linea GH ad lineam rectam, quam corpus, tempore motûs sui ab A ad P, eâ cum velocitate quam habuit in vertice A, describere posset (e).

Corol. 3. Hinc etiam vice versâ inveniri potest tempus, quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendicularum rectæ GH occurrens in H (f).

L E M M A XXVIII.

Nulla extat figura ovalis, cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod, ceu polum, revolvatur perpetuò linea recta, uniformi cum motu, & interea in rectâ illâ exeat punctum mobile de polo, pergatque semper eâ cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet spiralem gyris infinitis. Jam si aræ ovalis, à rectâ illâ abscissæ, portio per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia



(c) RECTA

tia puncti à polo, quæ huic aræ proportionalis est; ideoque omnia spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinitè producta spiralem secat in punctis numero infinitis; & æquatio, quâ intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones, quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuò secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, quâ intersectio altera etiam inveniat. Quoniam duarum sectionum conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri, nisi per æquationem quatuor dimensionum, quâ omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, & propterea eadem semper conclusio; quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones sectionum conicarum & curvarum tertiæ potestatis, eò quòd sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum; & intersectiones duarum curvarum tertiæ potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. Id nisi necessariò fieret, reducere liceret Problemata omnia solida ad plana, & plusquam solida ad solida. Loquor hic de curvis

(d) RECTA ab umbilico s ad perpendicularum cum axeeducta Parabolæ in T occurrat, et capiatur recta GV tripla ejus, quæ cum 4AS rectangulum claudat spatio ATS æquale. Erit $\frac{1}{2}GV \times AS = ATS$. Sed $ATPS = \frac{1}{2}GH \times AS$. Quare $ATPS$ erit ad ATS , hoc est, tempus quo conficitur arcus AP ad tempus quo conficitur arcus AT, ut GH ad GV. Præterea cum area ATS sit $\frac{1}{2}AS \times ST$, et ST æqualis sit duplæ AS, erit $ATS = \frac{1}{2}AS^2$. Sed $ATPS = \frac{1}{2}GV \times AS$. Quare $AS^2 = GV \times AS$. Ac proinde $GV = AS$. Tempus igitur quo conficitur arcus AP erit ad tempus quo conficitur AT ut GH ad AS. Q. E. D. (Eadem fere Le Seur & Jacquier.)

(e) NASCENTE arcu AP, sector parabolicus ASP triangulo rectilineo ASP fit primò æqualis, sive dimidio rectanguli AS x PO. Quare cum rectangulum $\frac{1}{2}GH \times AS$ sectori ASP semper sit æqualis, erit primò, congruentibus punctis P, A, $\frac{1}{2}GH \times AS = \frac{1}{2}PO \times AS$. Ac propterea $\frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}PO$, et $8GH = 3PO$. Quare $GH : PO = 3 : 8$; primò scilicet, arcu AP nascente. Sed cum recta PO arcumque AP nascentes sint primò inter se æquales (Lem. VII.) ratio prima nascentis rectæ GH, motu puncti H scriptæ, ad nascentem PO, ea erit quam celeritas puncti H (saltem quâ motum suum incipiet) habebit ad velocitatem corporis, per parabolam delati, in ipso vertice A. Sed æquabilis est motus puncti H, propter æquabilem aræ ASP descriptionem, cujus utique rationem recta GH, crescendo, constanter servat. Velocitas igitur æquabilis puncti H ad celeritatem corporis in parabolæ vertice A, rationem habebit eam quam 3 ad 8. Q. E. D.

(f) Propter æquales HP, HA, punctum H erit ad rectam à medio puncto rectæ AP ad perpendicularum educam.

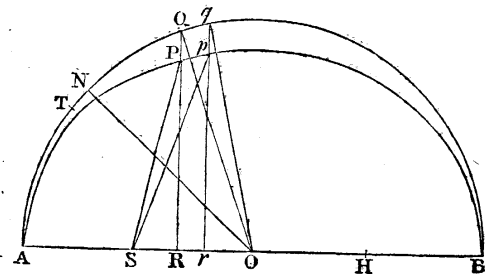
potestate

DE MOTU
CORPORUM

ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B , ut est sinus anguli $AOQ+E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N-AOQ-E+F$ ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli $AOQ+E$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B , ut est sinus anguli $AOQ+E+G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N-AOQ-E+G+H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $AOQ+E+G$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo $AOQ+E+G+I+\&c.$ Et ex cosinu ejus or & ordinatâ pr , quæ est ad sinum ejus qr ut ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p . Si quando angulus $N-AOQ+D$ negativus est, debet signum $+$ ipsius

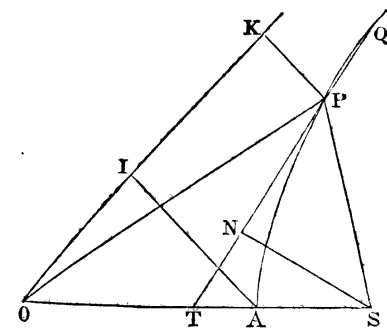
⁽ⁱ⁾ CAPIATUR scilicet arcus AN , qui sit ad ambitum Circuli AQB , ut tempus quo conficitur area ASP ad tempus conversionis integræ per ambitum Ellipseos; et jungantur ON , SO . Jam cum sector AON sit ad aream circuli AQB ut arcus AN ad ambitum; cum sit etiam area ASQ ad aream circuli ut area elliptica PSA ad aream totam ellipseos, hoc est ut arcus AN ad ambitum circuli AQB ; idcirco sector AON et area ASQ inter se æquales erunt. Quare si æqualium hoc et illud sectori AOQ dematur, quæ relinquentur, ea quoque inter se æqualia erunt. Sector igitur NOQ triangulo SOQ æqualis. Quare arcus NQ rectæ à puncto s in radium oq ad perpendicularum demissæ æqualis erit. Circuli AQB sit arcus Qr anguli B mensura. Et cum arcus circuli cujusvis fiat inter se ut anguli quos metiuntur, erit arcus ille circuli AQB qui radio OA æqualis est, ad arcum rq ut angulus $57^{\circ}29'578$ ad angulum B , hoc est ut OA ad OS . Arcus igitur rq rectæ so æqualis erit. Et cum arcus NQ rectæ à puncto s in rectam oq ad perpendicularum deductæ æqualis sit, erit rq ad NQ ut radius ad sinum anguli AOQ .

Jam cum angulus AON , motus utique medii, ex dato temporis spatio, quod elapsum fuerit ab appulsu planetæ ad apsidem A , datus sit, et cum ex angulo illo dato punctum N detur, si quo modo definiri posset amplitudo arcus NQ , datum esset punctum Q . Et ex dato Q , ad circumulum, daretur p ad ellipfin. Daretur autem arcus NQ , si quidem angulus QOA ad centrum circuli datus esset. Nimirum cum arcus ille NQ is sit, ad quem datus arcus rq rationem habeat, quam radius ad sinum anguli QOA . Atqui cum ignotus sit angulus PSA , seu motus veri, angulus QOA æquè ignorabitur. Neque è ratione radii ad anguli ignoti sinum arcus NQ , exquisitâ saltem ratione, definiri potest. Illud igitur agendum, quoniam via recta indaginis nulla pateat, ut anguli QOA æstimatio quadam conjecturâ fiat; et, elicitâ arcus NQ magnitudine, quæ conjecturâ illi respondet, videndum, an arcus AN , arcu illo NQ auctus, assumpto AO æqualis sit, vel quantum ab eo discrepet. Ita errorem assumptionis æstimare liceat, et novam anguli AOQ conjecturam, vero propriorem, capere. Quæ quidem ipsâ simili examini subjicienda, et novis rursus assumptionibus emendanda erit; donec, errores sensim amolendo, tantum non ipsam veritatem affectui finis. Nempe invento puncto N , ponatur arcus Nq (in figurâ appositâ) æqualis mensuræ anguli D , quo Newtonus docet modo definiendi.



ubique mutari in $-$, & signum $-$ in $+$. Idem intelligendum ^{LIBER PRIMUS.} est de signis ipsorum G & I , ubi anguli $N-AOQ-E+F$, & $N-AOQ-E-G+H$ negativi prodeunt. Convergit autem series infinita $AOQ+E+G+I+\&c.$ quàm celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quàm ad terminum secundum E . Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quòd area APS fit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico s in radium oq perpendiculariter demissam ⁽ⁱ⁾.

Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbolâ. Sit ejus centrum O , vertex A , umbilicus s , & Asymptotos OK . Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ tempore proportionalis. Sit ea A , & fiat conjectura de positione rectæ SP , quæ aream APS abscindat veræ proximam. Jungatur OP , & ab A & P ad Asymptoto alteri parallelæ, & per tabulam logarithmorum dabitur area $AIKP$, eique æqualis area OPA ^(k), quæ subducta de tri-

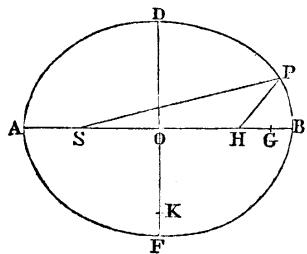


definiendi. Si locus P in ellipfi (in figurâ Newtonianâ) pro planetæ loco verè assumptus fuerit, verè etiam æstimatus fuerit angulus AOQ . Itaque arcus NQ illi Nq lineationis nostræ æqualis erit, et punctum q in ipsum Q incidet. Si q in ipsum Q non incidat, minus exquisitè collocatum erit punctum Q . Sit p punctum ubi Q collocari oportuit. Junctâ oq , à puncto s in oq ad perpendicularum demittatur sf , quæ rectæ oq in e occurrat. Exiguo existente angulo QOq , id enim ponimus, angulus seo tantum non rectus erit, et recta ef differentie rectarum, quæ à puncto s in rectas oq , oq ad perpendicularum demittantur, tantum non æqualis erit. Sed earum differentie arcus pq tantum non æqualis est. Nempe cum alteri rectarum arcus Nq æqualis sit, alteri arcus sp propemodum saltem æqualis. Quare $pq:qg=ef:qo$. Sed $ef:qg=of:oq$ propemodum. Ergo $pq:qg=of:oq$, et $pq:qg=of+oq:oq$ propemodum. Sed cum oq , of propè sint æquales, ut $oq+of$ ad oq ita erit oq ad of quàm proximè. Quare $rq:qg=oo:qg$ quàm proximè. Jam verò capiatur L quæ sit ad s , hoc est ad ipsam oq , ut oq ad os . Erit igitur quadratum ex oq æquale rectangulo $so \times L$. Est autem so ad of , ut radius, hoc est ut oq , ad cosinum anguli AOQ (propter angulum ad F rectum). Quare $cosin. AOQ \times so = oq \times of$. Quare $L \times so:cosin. AOQ \times so = oq^2:of^2$. Quare rursus $L:cosin. AOQ = oq:of$. Et convertendo $L:L-cosin. AOQ = oq:of$. Sed $oq:of = pq:qg$ quàm proximè (ex prius ostensis). Quare $L:L-cosin. AOQ = pq:qg$ quàm proximè. Ac proinde junctâ or , angulus QOP erit quàm proximè ad angulum QOq ut longitudo L ad eandem L cosinu anguli AOQ diminutam. Sed ut L ad $L-cosin. AOQ$ ita est angulus E Newtonianus ad angulum $N-AOQ+D$. Et angulus $N-AOQ+D = AON-AOQ+NOq = -QOq$. Quare $E = -QOq$ quàm proximè. Angulo igitur E illi AOQ ablato, restabit AOP quàm proximè. Et calculus ad Newtoni præcepta refectis, si quid reliquum est erroris, penitus id tandem amoliri licebit. [Hæc serè Keillius, vel horum saltem non multum dissimilia, in Actis Philosoph. & in 25^a Lectionum suarum Astronomicarum.]

^(k) Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. xv. & Cor.

angulo ops relinquet aream abscissam APS. Applicando areæ abscindendæ A & abscissæ APS differentiam duplam, $2APS - 2A$, vel $2A - 2APS$, ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem TP perpendicularis est, oriatur longitudo chordæ PQ. Inscribatur autem chorda illa PQ inter A & P, si area abscissæ, APS, major sit areâ abscindendâ A; secus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratio⁽¹⁾. Et computatione reperitâ invenietur idem accuratio in perpetuum.

Atque his calculis Problema generaliter confit analyticè. Verùm usibus astronomicis accommodatio est calculus particularis,



qui sequitur. Existentibus AO, OB, OD semiaxibus Ellipseos, & L ipsius latere recto, ac D differentiâ inter semiaxem minorem OD & lateris recti semissem $\frac{1}{2}L$; quære tum angulum γ , cujus sinus sit ad radium ut est rectangulum sub differentiâ illâ D, & semisummâ axium, $AO + OD$, ad quadratum

(¹) PUTA enim Q verum esse planetæ locum; junctis PQ, SQ, si locus P pro vero assumptus à vero non multum aberraverit, sector hyperbolicus SPQ parvus erit, et triangulo SPQ haud multo major. Sed triangulum SPQ, rectanguli SN x PQ dimidium erit; nimirum cum, ob parvitatem arcus PQ, angulus TPQ duobus rectis tantum non æqualis fiat, ut duæ rectæ TP, PQ pro unâ haberi possint. Sector igitur hyperbolicus SPQ, seu differentia areæ abscissæ ASP, et abscindendæ ASQ, dimidio rectanguli SN x PQ haud multo major erit. Quare dupla illa differentia, sive $2APS - 2A$, rectangulo illo haud multo major. Ac proinde recta PQ non multo minor erit quàm recta $\frac{2APS - 2A}{SN}$. Si igitur, aut versus verticem, A, aut ad partes puncti P contrarias, prout area APS

major quàm abscindenda minorve fuerit, inscribatur chorda PQ rectæ $\frac{2APS - 2A}{SN}$ æqualis, erit Q locus planetæ accuratio; vero tamen ejus loco promotior ceteriorve, prout area APS justo minor majorve sumpta fuerit. Calculis autem relictis error sensim amolendus erit. (Eadem ferè Le Saur & Jacquier, & in notis suis MSS Gregorius.)

(^m) VEL quod eodem redit, sicut mox ostendam (Lemm. H. VII.) capiat angulum γ cujus sinus sit ad radium, vel potius qui ipse sit ad angulum $57^{\circ}, 29, 578$ ut paralleloipedon super quadratum ex os, altitudine quæ rectæ OD æqualis sit, ad quadruplum cubi è dimidio axe transversio.

(ⁿ) Vel, quod eodem redit, capiat angulum z qui sit ad γ ut $8sh$ ad $3, aoi + od$.

(^o) Hujus computationis rationes abditissimas ut in lucem proferamus, ante omnia ex angulo mediæ quem vocant anomaliam, anguli BHP, ad umbilicum orbitæ superiorem constituti, formula quædam generalis conficienda est (quæ alia fanè ac series infinita esse nequit) cujus ope angulorum illorum differentiam æstimare liceat. Huic differentie æquationem Newtonianam, $x \pm v$, in orbitis quorum exigua est umbilicorum distantia ratione axis transversio, ita non æqualem ostendimus, ut illud quo hæc ab illâ aberit, in omnium quidem planetarum orbitis, si unum Mercurium exceperis, pro nihilo habendum ut. Sed ad formulæ illius inventionem, et ad alia quæ polliciti sumus præstanda, nonnullis è Geometriâ assumptis via nobis munienda est.

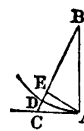
L E M M A

tum axis majoris AB (^m); tum angulum z , cujus sinus sit ad ra-^{LIBER PRIMUS.}
dium ut est duplum rectangulum sub umbilicorum distantia, SH, & differentiâ illâ, D, ad triplum quadratum semiaxis majoris AO (ⁿ). His angulis semel inventis; locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum τ proportionalem tempori, quo arcus BP descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum v , primam medii motus æquationem, ad angulum γ , æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli τ ad radium; atque angulum x , æquationem secundam, ad angulum z , æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus anguli τ ad cubum radii. Angulorum, τ , v , x , vel summæ, $\tau + x + v$, si angulus τ recto minor est, vel differentie, $\tau + x - v$, si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum BHP, motum medium æquatam (^o); & si HP occurrat ellipsi in P, acta SP abscindet aream BSP tempori proportionalem quàm proximè.

Hæc

L E M M A II. III.

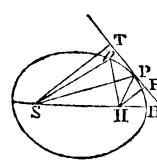
Si trianguli ABC angulus ad A rectus sit, angulusque ad B sit perexiguus, longitudo quæ latus BC, angulo recto adversum, superat latus BA, recto angulo exiguoque contiguum, cum duplo latere BC, laterique AC, quod exiguo angulo adversum est, quàm proxime proportionem tertia erit.



Centro B, radio BA, scribatur circulus, qui rectæ BC in D occurrat. Erit CD longitudo illa, quæ latus BC latus BA superat. Dico $2BC : CA = CA : CD$ quàm proximè. A puncto enim A in rectam BD deducatur ad perpendicularum recta AE. Propter angulos ad A et E rectos, erit $BC : BA = BA : BE$ (El. VI. 8.) Hoc est, cum BA, BD, propter circulum, sint inter se æquales, $BC : BD = BD : BE$. Convertendo, $BC : CD = BD : DE$. Sed propter perexiguam anguli ABC amplitudinem, illæ BC, BD inter se tantum non æquales erunt. Quare et illæ CD, DE, inter se tantum non æquales. (El. V. 14.) Quare CD tantum non semis sit rectæ CE. Sed propter angulos ad A et E rectos, erit $BC : CA = CA : CE$. Ac proinde $2BC : CA = 2CA : CE = CA : \frac{1}{2}CE$. Hoc est, cum CD tantum non æqualis sit dimidiæ CE, $2BC : CA = CA : CD$. Q. E. D.

L E M M A H. IV.

Si à puncto quovis, P, ad Ellipsin, cujus S, H umbilici, ducantur rectæ PS, PH ad umbilicos, puncto P per circuitum ellipses utcumque translato, fluxio sectoris BHP erit ad fluxionem sectoris BSP ut recta HP, ad rectam SP.



Ducatur enim recta TPR quæ ellipsin in puncto P contingat, & in illam à punctis S, H ad perpendicularum deducantur ST, HR. Sit P aliud punctum ad ellipsin, et jungantur SP, HP, BP. Jam fluxio sectoris BHP ad fluxionem sectoris BSP rationem habebit eam, quæ, coeuntibus punctis P, fluxionem sectoris BSP nascentis ad nascentem BSP prima erit: sive (per Lemma VI.) quæ trianguli nascentis BHP ad nascentem BSP prima erit. Sed cum triangula illa basin BP semper communem habeant, eadem semper erit triangulorum ratio, quæ rectorum ab horum verticibus, H, S, in communem basin ad perpendicularum demissarum. Et rectæ in communem nascentium basin ad perpendicularum demissæ sunt ipsæ HR, ST. Quare fluxio sectoris BHP erit ad fluxionem sectoris BSP ut

HR

Haftenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile rectâ descendat vel rectâ ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

S E C T I O

rectas EF, RO inter se parallelas, EH:ER=HB:EO. Quare EH:OM=HB:BO.
Similibus argumentis efficietur EH:OM=AH:AO. Q. E. D.

L E M M A H. VII.

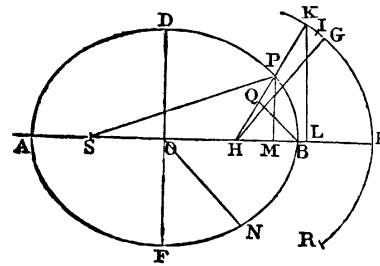
In Ellipsi rectangulum sub dimidiâ axium summâ dimidiâque lateris recti et axis secundi differentia ad quadratum è dimidiâ umbilicorum distantia rationem habet quam axis secundus ad axem transversum.

Sit Ellipsis cujus axis transversus AB, secundus DF, centrum O umbilici S, H (fig. text. p. 134.) Capiatur OG dimidio axi secundo OD æqualis, et OK æqualis dimidio lateri recto. Ita erit AG dimidia axium summâ, et FK dimidia axis secundum laterisque recti differentia erit. Dico esse FK X AG:OH²=OF:OA.

Erit enim FK X AG duobus FK X AO, FK X OG simul sumptis æquale. Quorum illud FK X AO=OF X OA-OK X OA=OF X OA-OF² (nempe cum propter trium AO, OF, OK continuum proportionis convenientiam rectangulum OK X AO quadrato ex OF æquale sit.) Verum, propter OG, OF inter se æquales, FK X OG=OF²-OF X OK. Quare FK X AO+FK X OG=AO X OF-OF X OK. Quare FK X AG=AO X OF-OF X OK. Jam verò AO X OF=AO²=OF:AO=OK:OF=OF X OK:OF². Quare (per El. V. 12.) AO X OF-OF X OK=AO²-OF²=OK:OF=OF:OA. Hoc est, cum AO X OF-OF X OK æquale sit rectangulo FK X AG (ex modò ostensis), et cum AO²-OF² æquale sit quadrato ex OH (propter ellipsin) idcirco erit FK X AG:OH²=OF:OA. Q. E. D.

Horum tandem ope facilis erit formulæ, quâ opus est, inventio; quæ, si omnia calculorum vi perficere voluissimus, magno quidem constitisset labore.

1. In orbe Elliptico cujus axes, transversus quidem AB, secundus FD, centrum O, umbilici S, H, sit s umbilicorum is quem vires centripetæ respiciant, punctum P locus quilibet planetæ in hoc orbe circumacti. Junctis PS, PH, centro H, radio HE, qui dimidio axi transverso OB æqualis sit, scribatur circulus; et hujus circuli capiatur arcus EG, qui ad totum circuli circuitum rationem habeat, quam sector BSP ad aream totam ellipsois. Junctâ igitur HG erit angulus ENG mediæ quem vocant anomalæ, ejusque mensura pro radio HE erit arcus EG. Et si producat hunc circumulum usque, cui in K occurrat, erit arcus EK mensura anguli BHP, ad umbilicum orbitæ superiorem constituti.



2. Significetur arcus EG literâ τ, arcus EK literâ z. A punctis K, P in axem ellipsois AB deducantur ad perpendicularum KL, PM. Erit KL sinus, HL cosinus arcus EK; quorum KL significetur literâ s, HL literâ x. Jungatur HD, et per O ducatur semidiameter ON, conjugata ejus quæ per P. Æquales OB, HE, HD literâ a communiter significentur. Semiaxis secundus OD significetur literâ c; et OH, dimidia umbilicorum distantia, literâ n.

3. Jam puncto P per ellipsois circuitum translato, fluxio sectoris circularis ENK erit ad fluxionem sectoris elliptici BHP ut quadratum ex HK ad quadratum ex HP. (Ideo scilicet quia nascentia sectorum ENK, BHP incrementa sunt primò inter se sicut triangula inter se similia, quorum triangulorum sunt HK, HP latera homologa.) Sed fluxio sectoris elliptici BHP ad fluxionem sectoris elliptici BSP erit ut HP ad PS (Lemma H. 4.) hoc est ut quadratum ex HP ad rectangulum HP X PS vel ut quadratum ex HP ad quadratum ex ON; nam quadratum ex ON rectangulum HP X PS est æquale.

S E C T I O VII.

De corporum ascensu & descensu rectilineo.

P R O P.

quale. (Hamilton. Conic. Lib. II. 19.) Cum igitur sit fluxio sectoris circularis ENK ad fluxionem sectoris elliptici BHP ut quadratum ex HK ad quadratum ex HP, et fluxio sectoris elliptici BHP ad fluxionem sectoris elliptici BSP ut quadratum ex HP ad quadratum ex ON, erit ex æquo fluxio sectoris circularis ENK ad fluxionem sectoris elliptici BSP ut quadratum ex HK ad quadratum ex ON. Hoc est ENK:BSP=HK²:ON². Quare cum ENK æqualis sit rectangulo ½ HE X EK, five ½ z, erit BSP=ON²/z.

4. Sed (per Lemma H. v.) est ON²-OD²:PM²=OH²:OD². Quare ON²-OD² X OD²/OH², five ON²-cc X cc/nn = PM². Sed propter rectas PM, KL parallelas, erit KL:PM=KH:HP. Quare

KL² X HP²/KH², five ss X HP²/a² = PM². Quare ON²-cc X cc/nn = ss/a² X HP². Et ON²=cc + nn/ss X HP².

5. Agatur per B recta BO cum rectâ ON parallela, quæ rectæ HP in Q occurrat. Ita dividetur HP in partes duas, PQ, QH; quarum altera quidem, PQ, æqualis erit abscissæ ab axe BM, altera vero QH = OM X HB/OB. (Lemma H. vi. & Cor. ejus z.) Propter rectas KL, PM inter se parallelas,

erit HL:HM=HK:HP. Quare HM=HL X HP/HK = x X HP/a. Sed HB=a-n. Quare BM=a-n-

x X HP/a. Et OM=n + x X HP/a. Quare QH (= OM X HB/OB) = n + x X HP/a X a-n = n + x X HP/a -

n²/a - nx X HP/a². Quare rursus PH=(BM+QH)=a-n²/a - nx X HP/a² = a²-n²/a² - nx X HP/a² = c²/a² - nx X HP/a². Et transponendo HP X a²/nx = c²/a². Quare HP=c²/(a²+nx). Et HP²=c² X c²/(a²+nx)².

Quare nn/ss X HP² = nn/ss X cc/a² + nx². Additoque utrinque cc, erit cc + nn/ss X HP², hoc est ex suprà ostensis

(§ 4.) ON²=cc + nn/ss X cc/a² + nx². Quare fluxioni areæ BSP, cui illud ON²/z jam suprà (§ 3.) ostensum

est æquale, erit hoc etiam æquale, cc/z + nn/ss X cc/(2a X a²+nx)² z. Erit inquam BPS=cc/z +

nn/ss X cc/(2a X a²+2a nx + n² x²) z.

6 Hujus membro posteriore in seriem infinitam, divisionis operâ, explicato, erit BPS=cc/z +

nn/ss X cc/z - 3cc X ss X x/a² z + 3n⁴ X c² X x²/2a⁹ z - . Hæc series, si exigua sit n, dimidia umbilicorum distantia

ratione dimidii axis transversi, a, qualiscunque fuerit arcus z amplitudo, celerrimè quidem ad metam properabit: ut tria prima ejus membra pro summâ totius haberi possint. Ponatur igitur

BPS = cc/z + nn/ss X cc/a² z - n³ X cc X ss/a⁷ z.

7. Jam cum sit z:z=a:s (Excerpt. ex Epist. iv. Not. k. Cor.) erit z=a/s. Rursus, cum sit z:i=a:x (Excerpt. ex Epist. iv. Not. l. Cor.) erit z=a/i. Quare quantitatis ejus, cui in-

venta est BPS æqualis, ejus inquam membro secundo erit hoc æquale, nn/ss X cc/a² z; tertio autem, hoc,

DE MOTU
CORPORUM

dens tranfeat recta DPC perpendicularis ad axem; actisque DS, PS, erit area ASD areae ASP, atque ideo etiam tempore proportionalis. Manente axe AB, minuat perpetuò latitudo ellipseos; & semper manebit area ASD tempore proportionalis. Minuat latitudo illa in infinitum: & orbe APB jam coincidente cum axe AB, & umbilico s cum axis termino B, descendet corpus in rectâ AC, & area ABD evadet tempore proportionalis. Dabitur itaque spatium AC, quod corpus de loco A, perpendiculariter cadendo, tempore dato describit, si modò tempore proportionalis capiatur area ABD, & à puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC. Q. E. I.



Caf. 2. Si figura illa RPB Hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem AB hyperbola rectangula BED: & quoniam areae CSP, CBP, SPB sunt ad areas CSD, CBED, SDEB, singulae ad singulas, in datâ ratione altitudinum CP, CD^(a); & area SPB proportionalis est tempore quo corpus P movebitur per arcum P/B; erit etiam area SDEB eidem tempore proportionalis. Minuat latus rectum hyperbolæ RPB in infinitum, manente latere transverso, & coibit arcus PB cum rectâ CB, & umbilicus s cum vertice B, & rectâ SD cum rectâ BD. Proinde area BDEB proportionalis erit tempore quo corpus c, recto descensu, describit lineam CB. Q. E. I.

Caf. 3. Et simili argumento si figura RPB Parabola est, & eodem vertice principali, B, describatur alia Parabola BED, quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cuius perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ CB; fiet segmentum

(^a) SPATIIS utique hyperbolicis CBP, CBED eadem inter ipsa est ratio, quæ rectis CP, CD. (Lemma IV.)

segmentum parabolicum BDEB proportionale tempore, quo corpus descendet ad centrum s vel B. Q. E. I. LIBER PRIMUS.

PROP. XXXIII. THEOR. IX.

Postis jam inventis, dico, quòd corporis cadentis velocitas, in loco quovis c, est ad velocitatem corporis, centro B, intervallo BC, Circulum describentis, in subduplicatâ ratione quam AC, distantia corporis à Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice posteriore A, habet ad figuræ semidiametrum principalem $\frac{1}{2}$ AB.

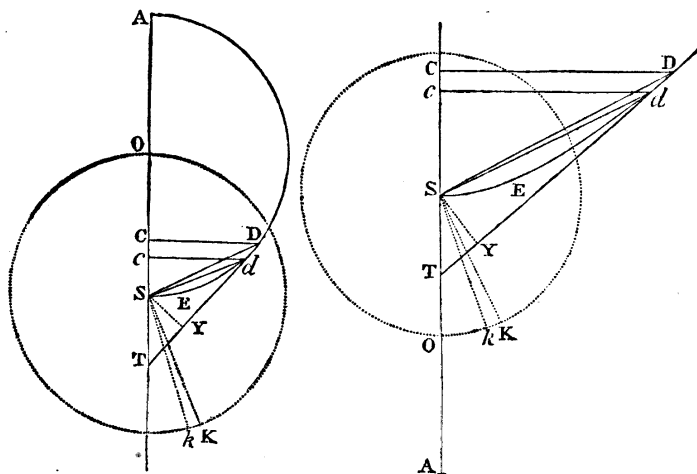
Bifecetur AB, communis utriusque figuræ RPB, DEB diameter, in o; & agatur recta PT, quæ tangat figuram RPB in P, atque etiam secet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T; fitque sy ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ RPB latus rectum ponatur L. Constat per Corol. 9. Prop. XVI. quòd corporis, in lineâ RPB circa centrum s moventis, velocitas in loco quovis P fit ad velocitatem corporis, intervallo SP, circa idem centrum, Circulum describentis in subduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2} L \times SP$ ad sy quadratum. Est autem ex conicis ACB ad CPQ ut 2AO ad L; ideoque $\frac{2CPQ \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicatâ ratione $\frac{CPQ \times AO \times SP}{ACB}$ ad sy quad. Porro ex conicis, est co ad BO ut BO ad to^(b); & compositè, vel divisim, ut CB ad BT. Unde, vel dividendo, vel componendo, fit BO – vel + co ad BO ut CT ad

IV. Cor. H. 1.) Sed eadem quoque triangulis CSP, CSD. (El. VI. 1.) Quare & sectoribus hyperbolicis SPB, SDEB inter ipsos ratio eadem intercedet. (El. V. 11.)

(^b) Hamilton. Conic. Lib. I. XLVIII. XLIX.

DE MOTU
CORPORUM

um lateris recti. Et quoniam est TC ad TD ut CC ad DD , & TD ad TS ut CD ad SY , erit ex æquo TC ad TS ut $CD \times CC$ ad $SY \times DD$. Sed (per Corol. 1. Prop. xxxiii.) est TC ad TS ut AC ad AO , puta si in coitu punctorum D , d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC est ad AO , seu SK , ut $CD \times CC$ ad $SY \times DD$. Porro corporis descendentis velocitas in c est ad velocitatem corporis circuli, intervallo sc , circa centrum s , describentis in subduplicatâ ratione AC ad AO , vel SK (per Prop. xxxiii.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum OKK in subduplicatâ ratione SK ad sc (per Corol. 6. Prop. iv.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola cc ad arcum kk in subduplicatâ ratione AC ad sc , id est in ratione AC ad CD . Quare est $CD \times CC$ æquale $AC \times KK$, & propterea AC ad SK ut $AC \times KK$ ad $SY \times DD$, indeque $SK \times KK$ æquale $SY \times DD$, & $\frac{1}{2}SK \times KK$ æquale $\frac{1}{2}SY \times DD$; id est area ksk æqualis areæ sdd . Singulis igitur temporis particulis gene-

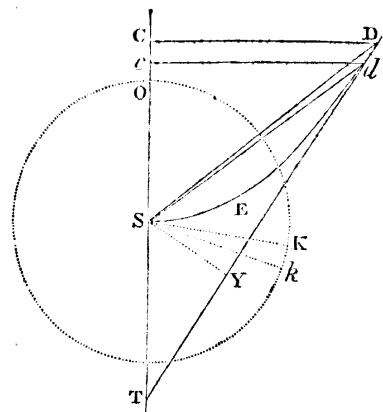


rantur arearum duarum particulæ ksk , & sdd , quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis iv.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. Q.E.D.

(^d) Hamilton, Conic. Lib. I. 47.

(^e) Quod ita scilicet effeceris, si arcum OK summæ arcûs AD rectæque DC æqualem sumptis.

Caf.



Caf. 2. Quod si figura DES LIBER PRIMUS.
Parabola fit, invenietur esse ut supra $CD \times CC$ ad $SY \times DD$ ut TC ad TS , hoc est ut 2 ad 1 (^d), ideoque $\frac{1}{4}CD \times CC$ æquale esse $\frac{1}{2}SY \times DD$. Sed corporis cadentis velocitas in c æqualis est velocitati, quæ circulus intervallo $\frac{1}{2}sc$ uniformiter describi possit (per Prop. xxxiv.) Et hæc velocitas ad velocitatem quæ circulus radio SK describi possit,

hoc est, lineola cc ad arcum kk (per Corol. 6. Prop. iv.) est in subduplicatâ ratione SK ad $\frac{1}{2}sc$, id est, in ratione SK ad $\frac{1}{2}CD$. Quare est $\frac{1}{2}SK \times KK$ æquale $\frac{1}{4}CD \times CC$, ideoque æquale $\frac{1}{2}SY \times DD$, hoc est, area ksk æqualis areæ sdd , ut supra. Q.E.D.

PROP. XXXVI. PROB. XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensûs.

Super diametro AS , distantia corporis à centro sub initio, describe semicirculum ADS , ut & huic æqualem semicirculum OKH circa centrum s . De corporis loco quovis c erige ordinatim applicatam cd . Junge sd , & areæ ASD æqualem constitue sectorem osk (^e). Patet per Prop. xxxv. quod corpus cadendo describet spatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum s gylando, describere potest arcum OK . Q.E. F (^f).

PROP. XXXVII. PROB. XXVI.

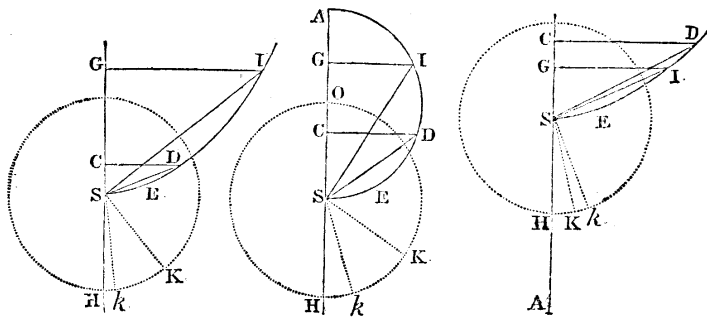
Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensûs vel descensûs.

Exeat corpus de loco dato c secundum lineam gs cum veloci-

(^f) Cor. H. Corpus igitur à loco A demissum, rectâ cadendo, eodem temporis spatio centrum s pervenerit, quo corpus aliud circa centrum s motu æquabili semicirculum OKH absolverit.

DE MOTU
CORPORUM

tate quâcunque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum sg circa centrum s revolvî possit, cape GA ad $\frac{1}{2}AS$. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum A infinitè distat, quo casu Parabola vertice s , axe sg , latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. xxxiv. Sin ratio illa minor vel major est quàm 2 ad 1, priore casu circulus, posteriore hyperbola rectangula super diametro SA describi debet. Patet per Prop. xxxiii (g). Tum centro s , intervallo æquante dimidium lateris



recti, describatur circulus $h\dot{k}k$, & ad corporis descendens vel ascendens locum G , & locum alium quemvis c , erigantur perpendiculara GI , CD occurrentia conicæ sectioni vel circulo in I ac

D.

(*) Nimirum recta gs , quâ corpus centrum versus cadit, vel ascensu recto centrum fugit, pro ultimâ figurâ sectionis conicæ habenda est, quæ umbilicum habeat s , axem verò suum in rectâ gs positum, si manente utique latere transverso, latere autem recto in infinitum imminuto, sectio illa conica sensim evanescat. Hoc enim è Prop. xxxiii. efficitur. Quod si velocitas corporis, rectâ cadentis vel ascendens, in loco quovis G , ad velocitatem corporis, circa centrum s ad distantiam sg motu æquabili circum scribentis, rationem habeat eam, quæ subduplicata sit ejus quàm binarius ad unitatem, pro ultimâ evanescens Parabola figurâ habenda est recta sg ; pro Ellipseos autem evanescens ultimâ, si minor sit velocitas illa prima; pro ultimâ denique Hyperbola, si major, quàm pro ratione binarii ad unitatem subduplicatâ. Hæc enim Propositionibus xxxiii^a & xxxiv^a. ostensa sunt. Quamobrem ad hujus Problematis effectiorem vel Parabola vel Circulus vel Hyperbola æquilateralis, pro variâ velocitatum ratione, usurpanda est, quemadmodum à Newtono præceptum est. Eadem fere Le Saur & Jacquier.

(b) Nam si viribus istiusmodi centripetis sollicitatum corpus aliquod rectâ non cadat, id utique per Ellipsin deferetur, cujus Ellipseos centrum ipsum virium centrum erit (per Prop. x. Cor. 1.). Sit APF ellipsis illa, & centrum ejus sit s , semiaxis SA . Et per p , locum quemvis corporis per ellipsin lati, ad axem SA ngatur ad perpendicularum recta pc , quæ circulo, qui centro A radio SA scriptus fuerit, in D occurrat. Junctis sp , sd , sector ASP sectoris elliptici ASP , atque propterea temporis proportionem servabit. (Lemma 11. Cor. II.) Et manente semiaxe SA , si latitudo ellipseos infinitè minuatur, manebit tamen sectori ASP temporis proportio. Quare cum circulorum sectores arcuum,

p . Dein junctis SI , SD , fiant segmentis $SEIS$, $SEDS$ sectores HSK , $HS\dot{k}$ æquales, & per Prop. xxxv. corpus G describet spatium gc eodem tempore quo corpus K describere potest arcum $k\dot{k}$. Q. E. F.

PROP. XXXVIII. THEOR. XII.

Posito quòd vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantie locorum à centro; dico, quòd cadentium tempora, velocitates & spatia descripta sunt arcubus, arcumque sinibus rectis & sinibus versis respectivè proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A secundum rectam AS ; & centro virium s , intervallo AS , describatur circuli quadrant AE , sitque CD sinus rectus arcus cujuscvis AD ; & corpus A , tempore AD , cadendo describit spatium AC , inque loco c acquirat velocitatem CD .

Demonstratur eodem modo ex Propositione x. quo Propositio xxxii. ex Propositione xi. demonstrata fuit (b).

Corol. I. Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum s , & corpus aliud revolendo describit arcum quadrantalem ADE .

enim, quibus insistant, inter se proportionem gerant; arcus quoque AD , temporis quo conficitur arcus ellipseos AP proportionem servabit, idque quæcunque fuerit ellipseos latitudo. Quare & latitudine illâ in nihilum abeunte, & arcu AP cum rectâ AC congruente, arcus circularis AD temporis casus recti per AC proportionem servabit. Q. E. D.

Arcus igitur AD temporum casus recti inter se proportionem servare eodem ex Prop. x^a. ejusque corollario ostensum est modo, quo propositio post tricesimam secunda ex propositione undecimâ ostensa fuit.

Quod præterea verò Newtonus dicit, arcum AD sinus rectos, en , velocitatum, quas corpus in locis c adeptum fuerit, proportionem inter se servare, id nos sic ostendimus.

Si per orbem ADE , APF quorum communis est axis transversus SA corpora duo deferantur è vertice A simul digressi, vigente, qualis posita est, virium centralium lege; arcus AD , AP à corporibus datam so , circuli utique radii. (Tom I. Excerpt. iv. Not. 1. Cor.) Exposita igitur datâ quiddam recta v , sit v alia recta, eâ quidem lege mutabilis, ut ad datam v eam semper illa ratio nem habent, quam velocitas corporis rectâ cadentis in loco quovis c ad datam corporis in circulo circumacti velocitatem. Erit igitur $v : v :: eo : so$. Et permittendo $v : en :: v : so$. Datarum verò v , so inter se ratio data. Quare et mutabilis, v , en , ratio tamen data erit.

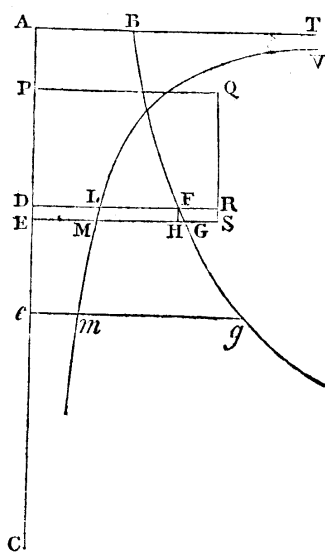
Corol.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibufvis ad usque centrum cadunt. Nam revolvendum tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

P R O P. XXXIX. P R O B. XXVII.

Positâ cujusunque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendētis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: et contrâ.

De loco quovis A in rectâ ADEC cadat corpus E, deque loco ejus E erigatur semper perpendicularis EG, vi centripetâ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: sitque BFG linea curva, quam punctum G perpetuò tangit. Coincidat autem EG ipso motûs initio cum perpendiculari AB, & erit corporis velocitas, in loco quovis E, ut rectâ, quæ potest aream curvilineam ABGE. Q. E. I.



In EG capiatur EM rectæ, quæ potest aream ABGE, reciprocè proportionalis, & sit VLM linea curva, quam punctum M perpetuò tangit, & cujus Asymptotos est rectâ AB producta; & erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam AE, ut area curvilinea ABTVME. Q. E. I.

Etenim in rectâ AE capiatur linea quàm minima, DE, datæ longitudinis; sitque DLF locus lineæ EMG, ubi corpus versabatur in D; & si ea sit vis centripeta, ut rectâ, quæ potest aream ABGE, sit ut descendētis velocitas; erit area ipsa in duplicatâ ratione velocitatis: id est, si pro velocitatibus in D & E, scribatur v & $v+1$, erit area ABFD ut

vv ,

(*) Namque puta A, & esse loca à quibus si casum unumquodque suum duo corpora inchoaverint, alterum

vv, & area ABGE ut $vv + 2v1 + 11$; & divisim, area DFGE ut $2v1 + 11$; ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2v1 \times 11}{DE}$; id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2v1}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{1 \times v}{DE}$. Est autem tempus, quo corpus cadendo describit lineolam DE, ut lineola illa directè & velocitas v inversè; estque vis ut velocitatis incrementum 1 directè & tempus inversè, ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{1 \times v}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF. Ergo vis ipsi DF, vel EG, proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut rectâ quæ potest aream ABGE. Q. E. D.

Porro cùm tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inversè ut linea rectâ quæ potest aream ABFD; sitque DL, atque ideo area nascent DLME, ut eadem linea rectâ inversè: erit tempus ut area DLME, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea AE describitur ut area tota ATVME. Q. E. D.

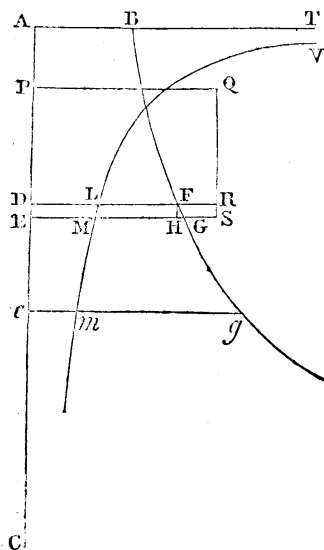
Corol. 1. Si P sit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquisivit eodem loco D; & in perpendiculari DF capiatur DR, quæ sit ad DF, ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, & compleatur rectangulum PDRQ, eique æqualis abscindatur area ABFD; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque (.) completo rectangulo DRSE, cùm sit area ABFD ad aream DFGE ut vv ad $2v1$, ideoque ut $\frac{1}{2}v$ ad 1, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area PQRD ad aream DRSE ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ DF, DR, ideoque ut areæ nascentes DFGE, DRSE; erunt ex æquo areæ totæ ABFD, PQRD ad invicem ut se-

terum quidem vi inæquabili alterum verò æquabili incitatum, in loco D æquales velocitates adeptæ fuerint. Tum completo, &c.

DE MOTU
CORPORUM

miffes totarum velocitatum (^k); & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D datâ cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e, erigendo ordinatam eg, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est recta, quæ potest rectangulum PQRD areâ curvi-



lineâ DFge vel auctum, si locus e est loco D inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rectam quæ potest rectangulum solum PQRD.

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex PQRD + vel - DFge, & capiendo tempus, quo corpus descripsit lineam de, ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea DLme ad rectangulum 2PD × DL. Namque tempus, quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam PD, est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam PE, in subduplicatâ ratione PD ad PE, id est (lineolâ DE jamjam nascente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2}DE$, seu 2PD ad $2PD + DE$; & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam DE ut 2PD ad DE, ideoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream DLME; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam de, ut area DLME ad aream DLme, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream DLme.

SECTION

(^k) Corporum quæ à focis A, c demissa fuerint, quorum illud vi inæquabili, hoc æquabili, incitari possumus, eorum in loco D velocitates litteræ v, w designent. Litteræ autem i, j velocitatum v, w incrementa designent simul genita. Jam conferendo primas quantitatum nascentium rationes,

LIBER
PRIMUS.

SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROP. XL. THEOR. XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum c; & moveatur corpus aliud à v in lineâ curvâ vik. Centro c, intervallis quibuscunque describantur circuli concentrici DI, EK, rectæ AC

in D & E, curvæque vik in I & k occurrentes. Jungetur ic occurrens ipsi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; sitque circumferentiarum circulorum intervallum, DE vel IN, quàm minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam distantie CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponentur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & si vis una IN (per legem Corol. 2.) resolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo secundum lineam NT corporis cursui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus à curfu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuò deflectere, inque viâ curvilineâ ITKk progredi. In hoc effectû producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera, IT, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quàm minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in D & I accelerationes, æqualibus temporibus factæ, si sumantur linearum nascentium

rationes, erit area ABFD ad aream DFGE ut vv ad $2I \times v$ (per hanc propositionem) sive ut $\frac{1}{2}v$ ad I . Erit autem area DFGE ad aream DRSE ut DF ad DR, hoc est ut I ad i . Rursum erit area DRSE ad aream PQRD ut $2i \times w$ ad wv (per hanc propositionem) hoc est ut i ad $\frac{1}{2}v$. Ex æquo igitur area ABFD erit ad aream PQRD ut $\frac{1}{2}v$ ad $\frac{1}{2}v$.

VOL. II.

U

DE,

DE MOTU
CORPORUM

DE, IN, IK, IT, NT rationes primæ, sunt ut lineæ DE, IT : temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE & IK describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ DE & IK ; ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas DE & IK, sunt ut DE & IT, DE & IK conjunctim, id est ut DE *quad.* & IT×IK *rectangulum*. Sed *rectangulum* IT×IK æquale est IN *quadrato* ^(a), hoc est, æquale DE *quad.* & propterea accelerationes in transitu corporum à D & I ad E & K æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in E & K : & eodem argumento semper reperiuntur æquales in subsequentiis æqualibus distantis. Q. E. D.

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

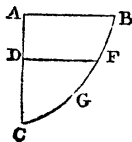
Corol. 1. Hinc si corpus vel oscilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politissimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales : erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo, vel impedimento vasis absolute lubrici, idem præstatur, quod vi transversâ NT. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima à centro distantia, ad quam corpus, vel oscillans, vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit ; sitque quantitas A distantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas quælibet A^{n-1} , cujus index

 $n - 1$

(¹) Propter angulos INK, NTK rectos.

(^m) NEMPE cùm ea sit lex vis centripetæ, ut ad quamlibet à centro distantiam, literâ A significatam, vis illius efficacia sit ut A^{n-1} , literâ utique n numerum designante ; Curva BFG Propositionis xxxix^m. per ipsum virium centrum c transibit, ut in figurâ appositâ. Ponatur igitur ca rectæ P æqualis, sitque cd æqualis indefinitæ A. Eductisque AB, DF ad perpendiculum, velocitas corporis rectâ cadentis vel ascendantis in loco D erit ut recta quæ potest aream ADFB, hoc est, ut \sqrt{ADFB} sive ut $\sqrt{CAB - CDF}$; est enim area ADFB duarum CAB, CDF differentia. Jam verò cùm DF sit ut vis centripeta in loco D, erit

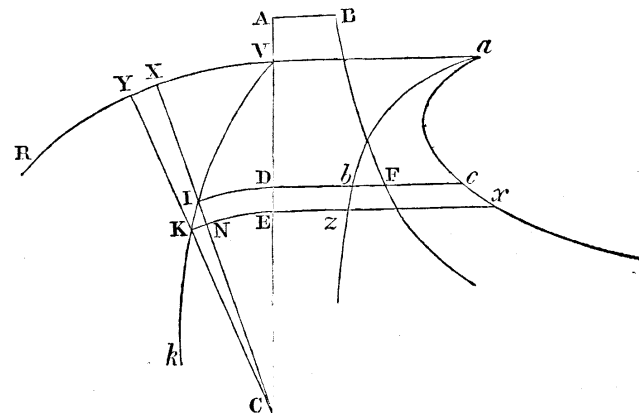


$n - 1$ est numerus quilibet n unitate diminutus ; velocitas corporis ^{LIBER PRIMUS.} in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. Namque velocitas rectâ ascendantis ac descendantis (per Prop. xxxix.) est in hac ipsâ ratione ^(b).

P R O P. XLI. P R O B. XXVIII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum c, & invenienda sit trajectoria vikk. Detur circulus VR, centro c, intervallo quovis, cv, descriptus ; centroque eodem describantur alii quivis circuli ID, KE trajectoriam secantes in I & K, rectamque cv in D & E. Age tum



rectam CNIX secantem circulos KE, VR in N & x, tum rectam cKY occurrentem circulo VR in Y. Sint autem puncta I & K sibi in-

DF ut cd^{n-1} . Quare fluxio areæ cdf erit ut $cd^{n-1} \times \frac{1}{cd}$. Quare area cdf erit ut $\frac{1}{n} cd^n$ (Geometr. Flux. Th. IV.) Ac propterea area CAB erit ut $\frac{1}{n} CA^n$. Et ADFB ut $\frac{1}{n} \frac{CA^n - CD^n}{1}$ sive ut $\frac{1}{n} \frac{P^n - A^n}{1}$ sive denique dato numero n, ut $\frac{P^n - A^n}{n}$. Quare velocitas corporis rectâ cadentis vel ascendantis, in loco D, erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

U 2

vicem

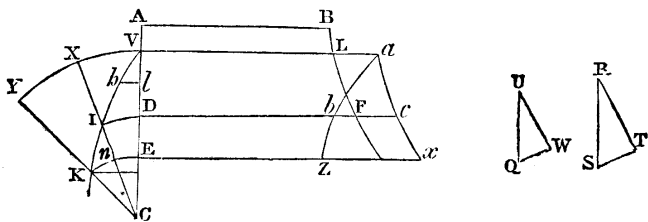
DE MOTU
CORPORUM

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, apfides trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim apfides puncta illa, in quibus recta ic per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam vik : id quod fit, ubi rectæ ik & nk æquantur, ideoque ubi area $ABFD$ æqualis est zz .

Corol. 2. Sed & angulus kln , in quo trajectoria alicubi fecat lineam illam ic , ex datâ corporis altitudine ic expedite invenitur; nimirum capiendo finum ejus ad radium ut kn ad ik , id est, ut z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

Corol.

rts , ad quorum utique similitudinem figuræ evanescentes vib , ink ultimò accedunt. Erit igitur ultimò vb ad bl ut vq ad qw , necnon ik ad kn ut rs ad st . Arcus autem evanescens vb ad evanescentem ik erit ultimò ut velocitas corporis in loco v ad velocitatem corporis in loco i ; nimirum cum arcus illi temporibus æqualibus conficiuntur. Arcus igitur evanescens vb ad evanescentem ik erit ultimò ut recta vq ad rectam rs . (El. v. 11.) Cum igitur sit bl ad vb ultimò ut wq ad qw , & vb ad ik ultimò ut vq ad rs , atque rursum ik ad kn ultimò ut rs ad st , ex æquo erit bl ad kn ultimò ut qw ad st . Quare & ratio illa quæ componitur è ratione rectæ vc ad rectam ic , atque eâ quæ ultima est evanescentis bl ad evanescentem kn , hæc eadem componetur è rationibus rectæ cv ad rectam ic , rectæque qw ad rectam st . Hoc est, ratio ultima rectanguli evanescentis $cv \times bl$, ad evanescens $ic \times kn$ eadem erit, quæ rectanguli $vc \times qw$ ad



rectangulum $ic \times st$. Fiunt autem evanescentia illa ultimò quidem inter se æqualia; id enim jam suprà ostendimus. Quare & rectangula $cv \times qw$, $ci \times st$ erunt inter se æqualia. Si igitur in rectâ df capiatur longitudo db , ea utique quæ oritur applicando rectangulum $cv \times qw$ ad duplam rectam rt ; atque rursum longitudo dc , quæ habeat ad db rationem eam quam quadratum ex cv ad quadratum ex ci , tum si ducantur curvæ abz , acx , ad quas collocentur semper puncta b , c : erit area quidem $vabv$ sectori orbitæ vci , area autem $vacd$ sectori circulari vex æqualis. Quod sic ostendo. Rectangulum $db \times 2rt$ cum æquale sit rectangulo $cv \times qw$, ita enim factum est, idem rectangulo $ic \times st$ æquale erit. Quare $db : ic = st : 2rt$, & $db : \frac{1}{2}ic = st : rt$. Quare cum st sit ad rt ut kn ad in ultimò erit $db : \frac{1}{2}ic = kn : in$ ultimò. Quare rectangulum evanescens $db \times in$ triangulo evanescenti cik fit ultimò æquale. Sed fluxio areæ $vabv$ ad fluxionem areæ vci rationem habet eam, quæ ultima est evanescentis rectanguli $db \times in$ ad evanescens triangulum cik . Fluxiones igitur illæ sunt inter se æquales. Quare & fluentes, areæ nimirum ipsæ $vabv$, vci , cum in loco v simul à nihilo generari inceperint, inter se æquales erunt. Præterea cum sit dc ad db ut quadratum ex cv ad quadratum ex ci , cum sit etiam fluxio areæ $vacd$ ad fluxionem areæ $vabv$ ut dc ad db , & fluxio sectoris vex ad fluxionem sectoris vci ut quadratum ex vx vel vc ad quadratum ex ci , idcirco erit $vacd : vabv = vex : vci$ (per El. v. 11.) Sed ostense sunt $vabv$, vci inter se æquales. Quare & $vacd$, vex inter se æquales erunt. (El. v. 14.) Quare & fluentes, areæ nimirum ipsæ $vacd$, vex (cum in loco v simul à nihilo generari inceperint) inter se æquales erunt. (Geometr. Flux. Th. II.)

Hæc

Corol. 3. Si centro c & vertice principali v describatur sectio^{LIBER PRIMUS.} quælibet conica vrs , & à quovis ejus puncto r agatur tangens rt occurrens axi infinite producto cv in puncto t ; dein, junctâ cr , ducatur recta cp , quæ æqualis sit abscissæ cr , angulumque vcp sectori vcr proportionalem constituat; tendat autem ad centrum c vis centripeta cubo distantiae locorum à centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco v justâ cum velocitate secundum lineam rectæ cv perpendiculararem: progredietur corpus illud in trajectoriâ vpq , quam punctum p perpetuò tangit;

Hæc ratione sectores vci , vex in areas transmutantur quæ ordinatis ad perpendicularum erectis, rectam vd , datæ utique distantie v & infinite cd differentiam, longitudinem habent. Unde si ordinate db , dc ad abscissam vd certas aliquas relationes gerant, Curvæ abz , acx per Newtoni inventa quadraturæ subjicientur: per earum vero quadraturas, vel inveniuntur Curvæ per quas corpora deferuntur, vel, si datæ sint curvæ illæ, dabuntur etiam tempora quibus data datarum curvarum spatia corpora absolverint.

Primum enim si datum sit temporis spatium quo corpus aliquod è dato loco v egressum ad alium ignotum locum i orbitæ non datæ pervenerit, locus ille i hæc ratione invenendus erit. Ex dato temporis spatio dabitur area $avpb$ magnitudinis; hujus igitur basis vp dabitur. (Analys. per Equationes Infinitas, C. xi. Sect. 2.) Datâ autem vp dabitur area $voca$ (ope Libri de Quadraturâ Curvarum). Huic areæ æqualis est sector vex , cujus etiam radius vc magnitudinis & positione datus est (id enim posuimus). Dato autem sectore vex , dabitur angulus vex . Quare recta cx positione data; sed cx magnitudine; cum datarum vc , vp differentie cd æqualis ea sit. Punctum igitur i datum. Datique aliis temporibus, dabuntur alia curvæ vik puncta; datisque pluribus punctis, quorum major tamen desiderabitur numerus prout Curva genere elatior fuerit, ipsa tandem Curva positione dabitur.

E contrario si Curva vik positione data sit, tempora quibus corpus aliquod data ejus spatia confecerit, hæc ratione inveniuntur. Datis punctis v , i , propter datum c , dabuntur cv , ci , magnitudine. Quare illarum differentia vp dabitur. Datæque abscissæ vp , è naturâ curvæ abz , area ejus $vabv$ dabitur; cui æqualis est sector vci . Sector igitur vci magnitudine datus erit. Si præterea detur punctum k , sector vck , per quadraturam curvæ abz , magnitudine datus erit. Unde si detur tempus, quo alterum è sectoribus illis confectum fuerit, tempus, quo alterum etiam conficietur, datum erit. Vel si temporum illorum neutrum detur, ratio tamen, quæ illis mutuò intercedit, innotescet.

Cæterum curvarum abz , acx ordinatæ db , dc ad abscissam vd relationes habent hæc ferè formulis ostensas.

Datum rectangulum $cv \times qw$ nota q^2 designet, distantiam indefinitam ci litera A , rectamque $\frac{q^2}{A}$ litera z . Jam cum rectangula $ic \times st$, $cv \times qw$, inter se æqualia sint (id enim ostensum), erit

$$st = \frac{q^2}{A} = z. \text{ Sed } rs = \sqrt{ABFD} \text{ (ita enim factum est). Unde in triangulo } rts, \text{ cujus angulus ad } r$$

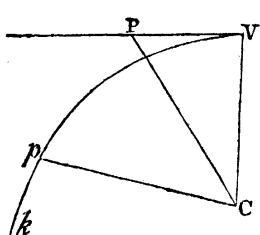
$$\text{rectus, } rt = \sqrt{ABFD - zz}. \text{ Ergo } db, \text{ quæ facta est } \frac{cv \times qw}{2rt} = \frac{q^2}{2rt}, \text{ hæc inquam } db =$$

$$\frac{q^2}{2\sqrt{ABFD - zz}}. \text{ Rursum cum facta sit } dc \text{ ad } db \text{ ut } cv^2 \text{ ad } ci^2, \text{ erit } dc = \frac{db \times cv^2}{ci^2}. \text{ Hoc est}$$

$$dc = \frac{q^2 \times cv^2}{2AA\sqrt{ABFD - zz}}. \text{ Quæ sane formulæ haud aliâ re à Newtonianis absunt, nisi quòd pro}$$

litera ejus q notam q^2 posuerim, ut superficiem scilicet apertius significarem. Verum illæ db , dc simplicius quidem, neque ad computandi utilitates minus ut opinor accommodatæ, hæc formulæ indicantur: $db = \frac{q^2}{2rt}, \text{ } dc = \frac{cv^2}{ci^2} \times \frac{q^2}{2rt}.$

ideoque

DE MOTU
CORPORUM

ipſi æqualis agatur cp , conſtituens angulum vcp , qui ſit ad angulum vcp in datâ ratione; viſ, quâ corpus gyrari poteſt in Curvâ illâ vpk , quâ punctum p perpetuò tangit, erit reciprocè ut cubus altitudinis cp . Nam corpus p per vim inertię, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi poteſt in rectâ vp . Addatur viſ in centrum

c , cubo altitudinis cp vel cp reciprocè proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam vpk . Eſt autem hæc Curva vpk eadem cum Curvâ illâ vpq in Corol. 3. Prop. xli. inventâ, in quâ ibi diximus corpora, hujusmodi viribus attracta, obliquè aſcendere (g).

P R O P. XLV. P R O B. XXXI.

Orbitum qui ſunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apſidum.

Problema ſolvitur arithmeticè, faciendo ut orbis, quem corpus in Ellipſi mobili (ut in Propositionis ſuperioris Corol. 2 vel 3.) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apſides requiruntur, & quærendo apſides orbis, quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbis autem eandem acquirant formam, ſi vires centripetæ, quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum v apſis ſumma, & ſcribantur t pro altitudine maximâ cv , A pro altitudine quâvis aliâ cp vel cp , & x pro altitudinum differentiâ $cv - cp$; & viſ, quâ corpus in Ellipſi circa umbilicum ſuum c (ut in Corol. 2.) revolvente movetur, quæque in Corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$, id eſt ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$, ſub-

ſtituendo

(*) Nimirum generalis eſt inventio lineæ vlp , qualis in Prop. xliii. à Newtono tradita eſt, qualicumque fuerit figura orbitæ immobiliſ vpk , aut quæcumque fuerint vires centrales, à quibus corpus in illâ orbitâ retineatur. Puta igitur vires eas paulatim imminui, et ad nullas tandem redigi. Quo factò orbita vpk in rectam abit, per quam corpus motu ſemel impreſſo æquabiliter feretur, & lineæ vlp lineæ vpk hujus Corollarii figuram induet. Sed viſ centralis, quâ corpus urgetur in loco quovis p , vim centram in loco cognato p lineæ immobiliſ parte quâdam exuperat, quæ ſit contrariè ut cubus è cp . (Id enim generaliter quoque oſenſum eſt, nullâ neque figuræ quâ prædita

ſtituendo $t - x$ pro A , erit ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A \text{ cub.}}$. Reducenda ſimiliter eſt viſ alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit $A \text{ cub.}$: & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, ideoque ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$, ſive (ſcribendo $t - x$ pro A in numeratore) ut $\frac{T \text{ cub.} - 3TTX + 3TXX - X \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$; & collatis numeratorum terminis cor-
respondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $T \text{ cub.}$ ut $-FFX$ ad $-3TTX + 3TXX - X \text{ cub.}$ ſive ut $-FF$ ad $-3TT + 3TX - XX$. Jam cum orbis ponatur Circulo quàm maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R , T æquales, atque x in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad $T \text{ cub.}$ ut $-FF$ ad $-3TT$; ſeu GG ad TT ut FF ad $3TT$, & viciffim GG ad FF ut TT ad $3TT$, id eſt, ut 1 ad 3 ; ideoque G ad F , hoc eſt angulus vcp ad angulum vcp , ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipſi immobili, ab apſide ſummâ ad apſidem imam descendendo, conficiat angulum vcp (ut ita dicam) graduum 180 ; corpus aliud in ellipſi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apſide ſummâ ad apſidem imam descendendo, conficiet angulum vcp graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob ſimilitudinem orbis hujus, quem corpus urgente uniformi vi centripetâ deſcribit, & orbis illius, quem corpus in ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi orbes, non univerſaliter, ſed tunc cum ad formam circularem quàm maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apſidem ſummam & apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu $103 \text{ gr. } 55 \text{ m. } 23 \text{ ſec.}$ ad centrum; perveniens ab apſide

prædita ſit lineâ vpk , neque virium centralium, quæ per lineæ illius ductum vigeant, ratione habitâ.) Cum vero nulla planè ſit viſ centralis in loco p , quando lineæ vpk recta utique exiſtat; quàm in lineâ mobili in loco p poſuimus viſ centralis exuperantiam, ea vim illam totam priuſ abſumet. Unde totæ vires per lineam vpk rationes cuborum è radiis contrarias induent. Præterea lineæ vpk eadem erit atque vpk Corollarii 3. Prop. xli. modò Ellipſis, à quâ genita eſt illa vpk , Circuli formam induat. Ita enim ſectores elliptici vcr cum angulis vcr proportionem mutuâ convenient, rectæque cr horum angulorum ſecantibus, ſive rectis cr vel cp hujus figuræ, æquales evadent.

VOL. II.

Y

ſummâ

summâ ad apsidem imam, ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens, ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} , seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irracionales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n , seu $T-X^n$, in seriem indeterminatam per methodum nostram serierum convergentium reductus, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}XXT^{n-2} &c.$ Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius, $RGG - RFF + TFF$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}XT^{n-2} &c.$ Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$; seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1} , & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n ; ideoque G ad F , id est angulus vcp ad angulum vcp , ut 1 ad \sqrt{n} . Quare cum angulus vcp , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam in ellipsi confectus, sit graduum 180 ; conficietur angulus vcp , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam in orbe propemodum circulari, quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab apside imâ ad apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis à centro, id est, ut A , seu $\frac{A^4}{A^1}$, erit n æqualis 4 , & \sqrt{n} æqualis 2 ; ideoque angulus inter apsidem summam & apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ gr. seu 90 gr. Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius, corpus perveniet ad apsidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apsidem summam; & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione x. manifestum est. Nam corpus, urgente hâc vi centripetâ, revolvitur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directè ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2 ; ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 gr. 16 m. 45 sec. Et propterea corpus, tali vi revol-

vens,

vens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab ap-
fide summâ ad imam, & ab imâ ad summam perveniet, in æter-
num. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-
quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut
 A^{11} , ideoque directè ut $\frac{1}{A^{11}}$, seu ut $-\frac{A^{12}}{A^{13}}$, erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr.
æqualis 360 gr. & propterea corpus de apside summâ discedens,
& subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam,
ubi implevit revolutionem integram; dein, perpetuò ascensu
complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem sum-
mam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Affuentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, & b , c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$, id est, ut $\frac{b \ln T-X^m + c \ln T-X^n}{A \text{ cub.}}$ seu (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut $\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} &c.}{A \text{ cub.}}$. Et collatis

numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2} &c.$ Et sumendo rationes ultimas, quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam cv , seu T , arithmetice per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F , id est angulus vcp ad angulum vcp , ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus vcp inter apsidem summam & apsidem imam in Ellipsi immobili sit 180 gr. erit angulus vcp inter easdem apsidem, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento, si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A \text{ cub.}}$, angulus inter apsidem invenietur graduum $180 \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec secus resolvitur Problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvitur semper debet in series convergentes denominatorem habentes

DE MOTU
CORPORUM

A cub. Dein pars data numeratoris, qui ex illâ operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus RGG-RFF+TFF-FFX ad ipsius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ sunt: et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; & contrâ. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n , & altitudo nominetur A : erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm} - 3$. Id quod per Exempla secunda manifestum est (b). Unde liquet vim illam in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, in recessu à centro, decrescere non posse (i): corpus tali vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere, nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de quâ egimus in Corol. 3. Prop. xli. Sin cœperit illud, de apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de quâ actum est in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. xlii. Sic & ubi vis, in recessu à centro, decrescit in majore quàm triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At si vis, in recessu à centro, vel decrescat in minore quàm triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: & contrâ, si corpus de apside

(b) Quantitatem enim illam quam in exemplis secundis litera n designavit, eam jam litera x significet, ut sit vis centripeta ut A^{x-3} . Erit igitur $G:F = 1:\sqrt{x}$; id quod calculi in exemplis illis subducti satis evincunt. Unde $\sqrt{x} = \frac{F}{G}$, & $x = \frac{FF}{GG}$; vel si pro illis G, F scribantur m, n , $x = \frac{nn}{mm}$. Unde $A^{x-3} = A^{\frac{nn}{mm}-3}$. Q. E. D.

(i) Nam si auctâ corporis à centro distantia vis centripeta decrescat, ponatur ea vis esse ut A^{-x}

fide ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam ^{LIBER PRIMUS.} appellat ad centrum; vis in recessu à centro aut augebitur, aut in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8, vel 4, vel 2, vel $1\frac{1}{2}$, de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit m ad n ut 8, vel 4, vel 2, vel $1\frac{1}{2}$, ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$, vel $\frac{1}{16} - 3$, vel $\frac{1}{4} - 3$, vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$, vel $A^{\frac{1}{16}-3}$, vel $A^{\frac{1}{4}-3}$, vel $A^{\frac{4}{9}-3}$; id est, reciprocè ut $A^{3-\frac{1}{64}}$, vel $A^{3-\frac{1}{16}}$, vel $A^{3-\frac{1}{4}}$, vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-3} seu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apsidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{1}{4}$, vel $\frac{2}{3}$, vel $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$, ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{1}{6}-3}$, vel $A^{\frac{2}{3}-3}$, vel $A^{\frac{1}{3}-3}$, vel $A^{\frac{1}{4}-3}$; & propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{1}{4}}$, vel $A^{\frac{2}{3}}$; aut directè ut A^6 vel A^{13} . Denique si corpus pergendo ab apside summâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 gr. ad 360 gr. five ut 121 ad 120, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{1}{121}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{1}{121}}$; seu reciprocè ut $A^{\frac{1}{4}}$, proximè (k). Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quàm duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{1}{4}$ propius ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit.

A^{-x} . Erit igitur $\frac{nn}{mm} - 3 = -x$. Et $\frac{nn}{mm} = 3 - x$. Quare illa x ternario non potest esse major,

ne quantitas quadratica $\frac{nn}{mm}$ negativa sit. Q. E. D.

(k) Cum igitur motus mensurus Apsidum orbitæ Lunaris tres gradus vix exuperet, vires, quas centrum terræ respicientes in orbitâ illâ dominari cernimus, rationem duplicatæ distantiarum contrariam haud magnopere aspernantur. Imò potius affectant. Et motus ille apsidum tardissimus non ex aliâ virium illarum conditione venit, sed ex vi quâdam extraneâ quæ centralibus se immiscet. Hæc autem quanta esse debeat, Newtonus in sequente Corollario æstimare instituit.

Corol.

DE MOTU
CORPORUM

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ oriatur: & contrâ. Ut si vis, quâ corpus revolvitur in Ellipsi, sit ut $\frac{1}{AA^2}$, & vis extranea ablata ut cA ⁽¹⁾, ideoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A \text{ cub.}}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apfides æqualis angulo graduum 180 $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponamus vim illam extraneam esse 357.45 ^(m) partibus minorem quàm vis altera quâ corpus revolvitur in ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel τ æquali 1, & 180 $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet 180 $\sqrt{\frac{100}{35745}}$, seu 180.7623, id est, 180 gr. 45 m. 44. f. Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 gr. 45 m. 44 f. perveniet ad apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa, singulis revolutionibus progrediendo, conficiet 1 gr. 31 m. 28 sec. Apsis Lunæ est duplo velocior circiter ⁽ⁿ⁾.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per cen-

⁽¹⁾ Nempe vis Solis, quæ motum apsidibus orbitæ Lunaræ infert, reliquis manentibus, est ut distantia Lunæ à centro Terræ; sicut in Corollario 16. Prop. LXVI. hujus Libri Newtonus ostensus est. Idcirco eas ponit vires extraneas, quæ cum quantitatis cA proportionem mutuâ convenient.

^(m) — esse 357.45.] Nempe vires Solis in Lunam, quæ apsidibus ejus motum inferunt, in partes duas resolvende sunt, sicut in Propositione LXVI. hujus Libri & Corollariis ejus Newtonus docet, quas partes rectæ LM, MN, fig. pag. 203. referunt. Harum LM dimidio ferè mense apfides contra signorum ordinem remeare cogit: altera MN, reliquo dimidio spatii mensuri, progredi. Et cum duarum LM, MN, hæc MN major sit, progressus regressu major erit, atque integro mense apfides promoverint. (Prop. LXVI. Cor. 7.) Hinc progressus ille apsidum orbitæ Lunaræ, quem Astronomi observârunt, tribuendus est differentiæ, quâ vis MN vim LM exuperat: et verisimile est eundem eum esse, quem spatii mensuro vis aliqua extranea procrearet, quæ mediocri earum differentiæ semper æqualis esset, & Lunam à centro terræ retrahendo, vim ejus centripetam in majoribus distantis minorem redderet, quàm pro contrariâ quadratorum ex distantis ratione. Jam verò vis mediocris LM est ad illam, quâ Luna in mediocri distantia centrum terræ petit, sicut 1 ad 178², id enim in Prop. XXV. Libri 3. calculis subductis Newtonus probat. Maxima vis MN tripla est illius LM. Mimima, nulla est. (Prop. LXVI. Cor. 7. & Prop. XXVI. Libri 3.) Mediocris igitur erit ea, quæ sit ad mediocrem LM ut 1 $\frac{1}{2}$ ad 1. Quare mediocris MN mediocrem LM parte dimidiâ superabit. Unde cum LM sit ad vim centripetam Lunæ terram versus mediocrem, ut 1 ad 178², differentiâ, quâ mediocris MN superat mediocrem LM, erit ad vim illam mediocrem centripetam Lunæ versus terram ut 1 ad 357.45. Ponamus igitur (inquit Newtonus) vim extraneam tot partibus esse minorem vi alterâ, quâ corpus per Ellipsin convertatur, & calculos subducendo explore-mus, an motus apsidum, qui ex tali vi extraneâ oriturus est, is sit quem in orbitâ Lunari Astro-

trum

trum virium transeunt. Supereft ut motus etiam determinemus ^{LIBER PRIMUS.} in planis excentricis. Nam scriptores, qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliques in planis quibuscunque datis, quàm perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, & planis excentricis innitentium, hîc considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica, ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corporum incumbunt, quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur, & orbitas movendo describunt. Et eadem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

S E C T I O X.

De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

P R O P. XLVI. P R O B. XXXII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis

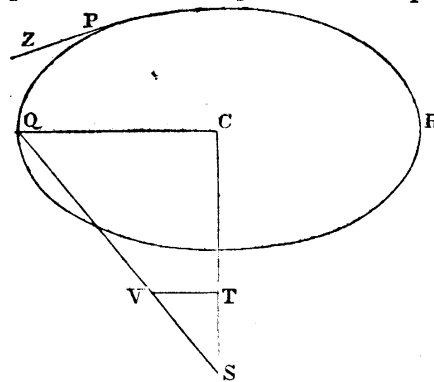
⁽ⁿ⁾ Vis extraneæ æstimatio dato apsidum motu viâ rectâ ad hunc ferè modum iniri possit. Ponatur translatio mensura apsidis summæ 3°. cum vis centralis in orbe elliptico immobili sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ut cA . Pro literis b, m, n , in exemplis tertiis scribendi sunt numeri 1, 1, 4, erit-

que angulus conversionis ab apside summâ summam usque rursum apsidem 360 $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 363$. Unde $360^2 \times 1 - c = 363^2 \times 1 - 4c$. Sive $360^2 - 360^2 c = 363^2 - 4 \times 363^2 c$. Quare $4 \times 363^2 - 360^2 = 363^2 - 360^2 = 6 \times 360 + 9 = 2169$. Sive $397476 \times c = 2169$. Quare $c = 1 : 2169 : 397476 = 1 : \frac{397476}{2169} = 1 : 178\frac{1}{2}$ propemodum. Quid igitur? Num tanta sta-

tua est vis solis mediocris, quæ progressum illum mensurum trium circiter graduum apsidum Lunarum pariat. Hand censeo. Corollarium illud 7. Prop. LXVI. quod certissimis rationibus confirmatum est, erroris argueret. Ipsam potius, quam hic usurpavimus, vis extraneæ æstimationem suspectam habeo. Cujus exquisita ratio in eo certè nititur, quòd vires, quæ in utroque orbe, stabili mobilique, vigeant, commensu licet radiorum aliæ, centrum tamen idem respiciant. Inde enim venit constans illa angulorum vcp , vcp inter ipsos ratio, quam Problematis xxx. compositio postulat. Et è ratione illâ constante Propositionis XLIV. Corollariorumque ejus doctrina tota pendet, quæque in hac Propositione tradita est calculorum ratio. Corpus autem Lunæ triplici incitatur. Primum vi propriâ terræ versus terræ centrum. Tum solari, quæ in duas resolvitur; quarum altera, centrum terræ spectans, efficaciam vis terrestris auget; altera verò, secundum rectam directâ quæ cum eâ parallela sit, quæ centra solis terræque jungat, cum duabus aliis vim totam efficit à centro terræ nisi in ipsis corporum conjunctionibus paulum declinantem. (Prop. LXVI. hujus Libri.) Unde consequens erit motus Lunares per motum corporis in orbe elliptico, qui ipse circum umbilicum convertatur suum, minus exquisitè representari. Cæterum hunc locum de apsidum motu aliisque Lunaribus, accuratè pertractârunt Clairautius & T. Simson.

figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.

Sit s centrum virium, sc distantia minima centri hujus à plano dato, p corpus de loco p secundum rectam pz egrediens, q corpus idem in trajectoriâ suâ revolvens, & pqr trajectoria illa, in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur cq , qs , & si in qs capiatur sv proportionalis vi centripetæ, quâ corpus trahitur versus centrum s , & agatur vt quæ sit parallela cq & occurrat sc in t : vis sv resolvetur (per legum Corol. 2.) in vires st , tv ; quarum st , trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera tv , agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè versus punctum c in plano datum; ideoque efficit,



ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis st tolleretur, & corpus vi solâ tv revolveretur circa centrum c in spatio libero. Datâ autem vi centripetâ tv , quâ corpus q in spatio libero circa centrum datum c revolvitur, datur (per Prop. XLII.) tum trajectoria pqr , quam corpus describit, tum locus q ,

in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo q ; & contrâ. Q. E. I.

PROP. XLVII. THEOR. XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiae corporis à centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolvantia describent ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam,

Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis sv , quâ corpus q in plano quovis pqr revolvens trahitur versus centrum s , est ut distantia sq ; atque ideo ob proportionales sv & sq , tv & cq , vis tv , quâ corpus trahitur versus punctum c , in orbis plano datum, est ut distantia cq . Vires igitur, quibus corpora in plano pqr versantia trahuntur versus punctum c , sunt pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undique trahuntur versus centrum s ; & propterea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem figuris, in plano quovis pqr circa punctum c , atque in spatiis liberis circa centrum s ; ideoque (per Corol. 2. Prop. x. & Corol. 2. Prop. xxxviii.) temporibus semper æqualibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum c , vel periodos movendi ultrò citròque in lineis rectis, per centrum c in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circum axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revolvi, & eâ revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri, ut eorum centra in his superficiebus perpetuò reperiantur. Si corpora illa obliquè ascendendo & descendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROP. XLVIII. THEOR. XVI.

Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insillat, & more rotatarum revolvendo, progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcûs dimidii, qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

PROP. XLIX. THEOR. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insillat, & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei,

VOL. II.

Z

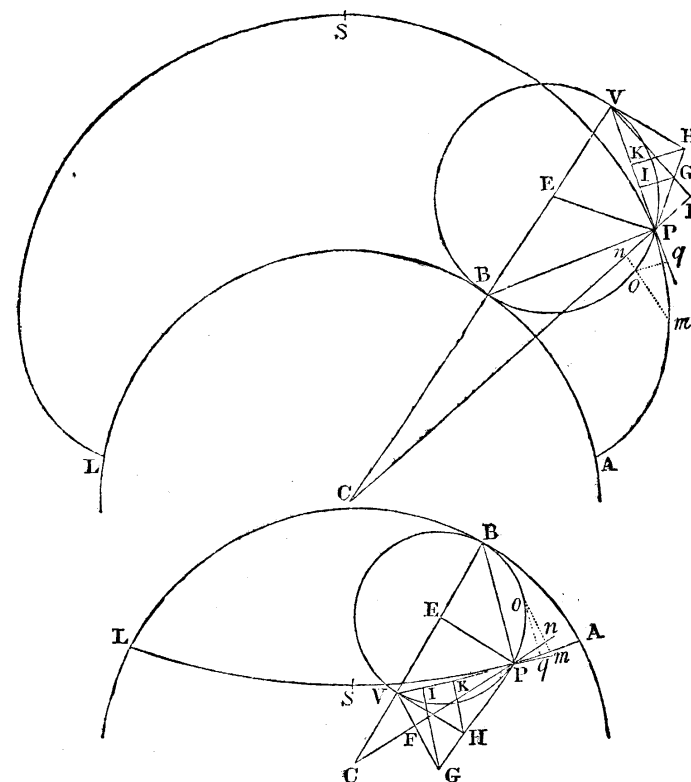
ilinei,

vilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum finum versum arcus dimidii, qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Sit ABL globus, c centrum ejus, BPV rota ei insitens, E centrum rotæ, B punctum contactûs, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B versus L; & inter eundum ita revolvi, ut arcus, AB, PB, sibi invicem semper æquantur, atque punctum illud P, in perimetro rotæ datum, interea describere viam curvilineam AP. Sit autem AP via tota curvilinea descripta, ex quo rota globum tetigit in A, & erit viæ hujus longitudo AP ad duplum finum versum arcus $\frac{1}{2}$ PB, ut 2CE ad CB. Nam recta CE (si opus est) producta occurrat rotæ in v, junganturque CP, BP, EP, VP; & in CP productam demittatur normalis VF. Tangant PH, VH circulum in P & v, concurrentes in H; fecetque PH ipsam VF in G, & ad VP demittantur normales GI, HK. Centro item c, & intervallo quovis describatur circulus nom, secans rectam CP in n, rotæ perimtrum BP in o, & viam curvilineam AP in m; centroque v & intervallo vo describatur circulus secans VP productam in q.

Quoniam rota eundo semper revolvitur circa punctum contactûs B; manifestum est, quod recta BP perpendicularis est ad lineam illam curvam AP, quam rotæ punctum P describit; atque ideo quod recta VP tanget hanc Curvam in puncto P. Circuli nom radius, sensim auctus vel diminutus, æquetur tandem distantiae CP; &, ob similitudinem figuræ evanescentis pnomq & figuræ PFGVI, ratio ultima lineolarum evanescentium pm, pn, po, pq, id est, ratio mutationum momentanearum curvæ AP, rectæ CP, arcus circularis BP, ac rectæ VP, eadem erit, quæ linearum PV, PF, PG, PI respectivè. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares sint, angulique HVG, VCF propterea æquales; & angulus VHG (ob angulos quadrilateri HVEP ad v & P rectos) angulo CEP æqualis est, similia erunt triangula VHG, CEP; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV, seu HP; & ita KI ad KP: & compositè, vel divisim, ut CB ad CE ita PI ad PK; &, duplicatis consequentibus, ut CB ad 2CE ita PI ad PV, atque ita Pq ad pm. Est igitur decre-

decrementum lineæ vp, id est, incrementum lineæ BV - VP, ad ^{LIBER} incrementum lineæ curvæ AP in datâ ratione CB ad 2CE, & prop- ^{PRINUS.}



tere (per Corol. Lem. IV.) longitudines BV - VP & AP, incrementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente BV radio, est VP co-sinus anguli BVP, seu $\frac{1}{2}$ BEP; ideoque BV - VP sinus versus est ejusdem anguli; & propterea in hac rotâ, cujus radius est $\frac{1}{2}$ BV, erit BP - VP duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}$ BP. Ergo AP est ad duplum finum versum arcus $\frac{1}{2}$ BP ut 2CE ad CB. Q.E.D.

Lineam autem AP in propositione priore Cycloidem extra globum; alteram, in posteriore, Cycloidem intra globum, distinctionis gratiâ, nominabimus.

Corol. I. Hinc si describatur Cyclois integra ASL, & bifecetur ea

DE MOTU
CORPORUM

ea in s , erit longitudo partis ps ad longitudinem vp (quæ duplus est sinus anguli vbp , existente eb radio) ut $2ce$ ad cb , atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et longitudo femiperimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum BV ut $2ce$ ad cb .

PROP. L. PROB. XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oscilletur in Cycloide datâ.

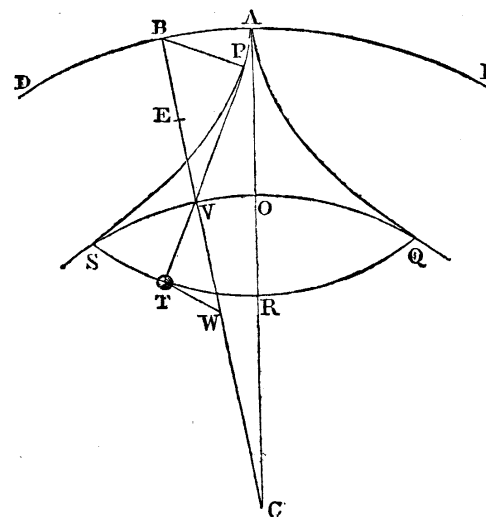
Intra globum qvs , centro c descriptum, detur Cyclois QRS , bifecta in R , & punctis suis extremis, Q & s , superfici ei globi hinc inde occurrens. Agatur CR bifecans arcum QS in O , & producat eam ad A , ut sit CA ad CO ut CO ad CR . Centro c intervallo CA describatur globus exterior DAF , & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter sit AO , describantur duæ semicycloides AQ , AS , quæ globum interiorem tangant in Q & s , & globo exteriori occurrant in A (^a). A puncto illo A , filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T , & ita intra semicycloides AQ , AS oscilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendicularo AR , filum parte sui superiore, AP , applicetur ad semicycloidem illam, APS , versus quam peragitur motus, & circum eam, ceu obstaculum, flectatur; parteque reliquâ, PT , cui semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oscillabitur in Cycloide datâ QRS . Q. E. F.

Occurrat

(^a) Curvas motu rotæ scriptas, cujus diameter est AO , quæque à puncto A proficiscatur, eas semicycloides esse, et in punctis s , Q globum interiorem contingere, ad hunc modum ostendimus. Intellige junctam cs et productam, ut globus exteriori in D occurrat. Jam cum CA sit ad CO ut CO ad CR (ita factum enim) convertendo, erit CA ad AO , ut CO ad OR ; et permutando, CA ad CO ut AO , ad OR . Diametri igitur rotarum, quarum motu scribuntur cycloides intra globos DF , sQ , cum globorum diametris proportionem conveniunt. Arcus autem circulares AD , os inter se sunt similes. Quare et arcus illi cum globorum diametris, ac proinde cum diametris rotarum, proportionem convenient. Hoc est $AD : os :: AO : OR$. Permutando $AD : AO$ vel $os :: OR$. Unde cum os semicirculus sit arcus ejus circularis, quem rota, cujus diameter est OR , integrâ sui conversione confecerit, erit AD semicirculus arcus ejus circularis, quem rota, cujus diameter est AO , integrâ sui conversione confecerit. Quare ps axis erit Cycloidis, quam motus hujus rotæ generaverit. Unde punctum s ad Cycloidem erit, et arcus AS semicyclois erit. Eam verò globum interiorem in puncto s contingere, ex eo patet, quod recta ps tam cycloidem AS , cujus est axis, quam circum os ad cujus centrum tendit, ad perpendicularum secat. Et simili argumentatione efficiatur punctum Q ad cycloidem esse, cujus proinde arcus QA semicyclois erit, et globum interiorem in Q continget. Q. E. D.

(^b) Recta PA , à puncto P ad perpendicularum cum PT educta, occurrat globo AD in B . Quando rotæ, cujus diameter est AO , punctum quo cyclois APQ scribitur, quod punctum generans vocatur, quando illud locum P obtineat, ambitus rotæ globum AD in B continget. Id enim ex demonstratione Propositionis XLVIII. vel XLIX. manifestum est. Et in tali rotæ situ, diametri ejus, quæ per B ducta fuerit, extremitas altera ad globi QOS superficiem erit. Eadem verò, erit ad rectam PT , quæ cycloidem in B contingit. (Per ea quæ in demonstrandis Proposit. XLVIII. & XLIX.

XLIX.



Occurrat enim filum PT tum Cycloidis QRS in T , tum Circulo QOS in v , agaturque cv ; & ad fili partem rectam PT , è punctis extremis P ac T , erigantur perpendiculara BP , TW , occurrentia rectæ cv in B & w . Patet, ex constructione & generis similium figurarum AS , SR , perpendiculara illa, PB , TW , abscindere de cv longitudines VB , VW ro-

tarum diametris OA , OR æquales (^b). Est igitur TP ad VP (duplum sinum anguli vbp existente $\frac{1}{2}BV$ radio) ut BW ad BV , seu $AO + OR$ ad AO ; id est (cum sint CA ad CO , CO ad CR & divisim AO ad OR proportionales) ut $CA + CO$ ad CA , vel, si bifecetur BV in E , ut $2CE$ ad CB . Proinde (per Corol. 1. Prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili PT æquatur semper Cycloidis arcui ps , & filum totum APT æquatur semper Cycloidis arcui dimidio APS , hoc est

XLIX. à Newtono ostensa sunt.) Concurfus igitur rectæ PT cum globo QOS , hoc est, punctum v , extremitas erit diametri rotæ, quæ per B ducta fuerit, contactum utique rotæ et globi FAD . Erit igitur ipsa sv rotæ diameter, quæ per contactum rotæ globique FAD transit. Vergit igitur eadem ad punctum c centrum globi. Puncta igitur tria c , v , B ad rectam sunt, cujus pars sv ipsi AO æqualis est. Jam à puncto T educta recta tw , ad perpendicularum cum PT , ipsi cv in w occurrat. Quando rota, cujus diameter est OR , eum situm obtineat, ut globum soq in puncto v contingat, diameter ejus per punctum contactus v congruet cum parte aliquâ rectæ vc ; arcus autem rotæ, qui à diametro illâ & puncto generante, quod vocant, interceptus sit, is arcui vo æqualis erit. Rotâ autem, cujus diameter est AO , eum situm obtinente, ut globum FAD in B contingat, arcus ejus, cujus chorda est BP , arcui AB æqualis est. Quare arcus quem diximus rotæ prioris ad rotæ posterioris arcum, cujus chorda BP , rationem habebit quam vo ad AB ; five eam quam co ad CA ; five eam denique quam or ad AO . Similes igitur inter se sunt rotarum arcus illi, utpote cum rotarum diametris proportionem convenientes. Angulus igitur qui ad ambitum rotæ, cujus diameter est or , constitutus arcum ejus à diametro per punctum v et puncto generante interceptum basem habeat, is angulo svr æqualis erit, five angulo vwv . Quapropter diametro rotæ cum parte aliquâ rectæ vc congruente, recta à puncto v in punctum generans exacta congruet cum parte aliquâ rectæ vr . Rotâ igitur eum situm obtinente ut globum QOS in puncto v contingat, punctum generans erit ad rectam vr . Idem verò ad cycloidem sr . Ad concursum igitur rectæ vr et Cycloidis: hoc est ad ipsum punctum r . Quare rotâ eum situm obtinente ut globum QOS in puncto v contingat, erit r locus puncti generantis. Unde recta tw , ad perpendicularum cum rectâ vr , quæ contactum rotæ et globi cum puncto generante conjungit, educta, hæc Cycloidem in r continget, rectaque vw , rectis rv , tw interceptæ, diametri rotæ or æqualis erit. (Per ea quæ in demonstrandis Propositionibus XLVIII & XLIX. à Newtono sunt ostensa.)

(per

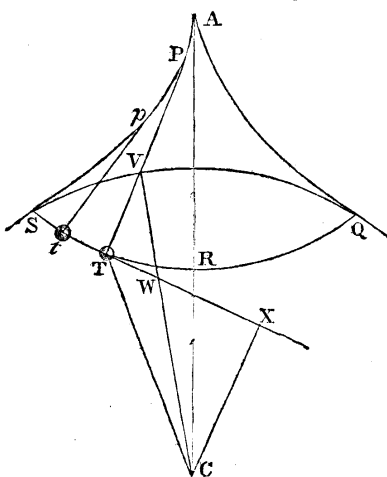
(per Corol. 2. Prop. XLIX.) longitudini AR. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide datâ QRS. Q. E. D.

Corol. Filum AR æquatur femicycloidi AS, ideoque ad globi exterioris femidiametrum AC eandem habet rationem, quam similis illi femicyclois SR habet ad globi interioris femidiametrum co.

PROP. LI. THEOR. XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum, c, sit in locis singulis ut distantia loci cujusque à centro; & hæc solâ vi agente, corpus T oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis QRS: dico, quòd oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.

Nam in Cycloidis tangentem TW infinite productam cadat perpendicularum cx & jungatur cr.



Quoniam vis centripeta, quâ corpus T impellitur versus c, est ut distantia cr, atque hæc (per legem Corol. 2.) resolvitur in partes cx, tx, quarum cx, impellendo corpus directè à p, diffundit filum pr, & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera, tx, urgendo corpus transversim, seu versus x, directè accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est, quòd corporis acceleratio, huic

vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo tx; id est, ob datas cv, wv, iisque proportionales tx, tw, ut longitudo rw, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus Cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, APT de perpendicularo AR inæqualiter deductis, & simul demissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi, TR, tr. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ; & propterea partes, quæ manent describendæ, & acce-

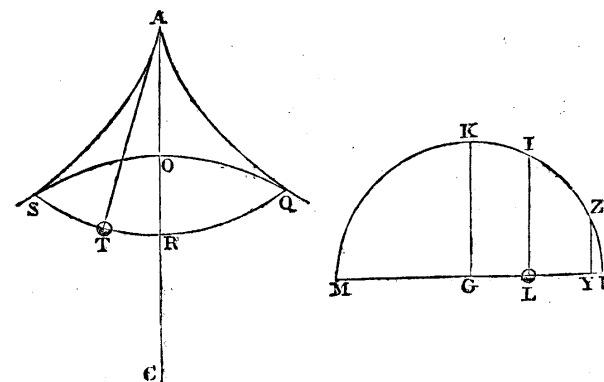
accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt e-
tiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque
ideo velocitates genitæ, & partes his velocitatibus descriptæ, partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendicularum AR. Cùmque vicissim ascensus perpendicularorum de loco infimo R, per eosdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis à viribus iisdem à quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cùm Cycloidis partes duæ, RS & RQ, ad utrumque perpendiculari latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas, tam totas quàm dimidias, iisdem temporibus semper peragent. Q. E. D.

Corol. Vis, quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in Cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco altissimo, s vel Q, ut cycloidis arcus TR ad ejusdem arcum SR vel QR.

PROP. LI. PROB. XXXIV.

Definire & velocitates Pendulorum in locis singulis, & tempora, quibus tum oscillationes totæ, tum singule oscillationum partes, peraguntur.

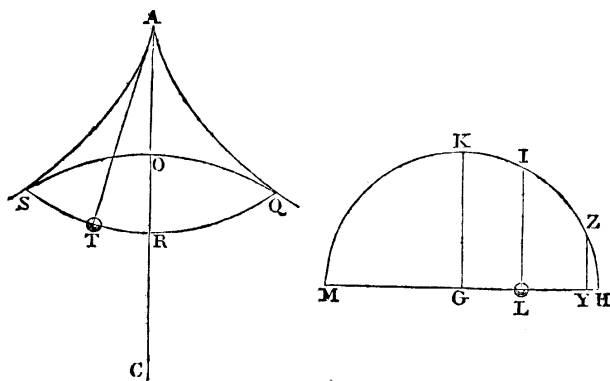
Centro quovis G, intervallo GH Cycloidis arcum RS æquante,



describere semicirculum HKM, femidiametro GK bisectum. Et si vis centripeta,

DE MOTU
CORPORUM

centripeta, distantis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum G , fitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro globi QOS ad ipsius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum T demittitur è loco supremo S , cadat corpus aliquod, L , ab H ad G : quoniam vires, quibus corpora urgentur, sunt æquales sub initio, & spatia describendis, TR , LG , semper proportionales, atque ideò, si æquantur TR & LG , æquales in locis T & L ; patet corpora illa describere spatia ST , HL æqualia sub initio, ideòque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare (per Prop. XXXVIII.) tempus, quo corpus describit arcum ST , est ad tempus oscillationis unius, ut arcus HI , tempus quo corpus H perveniet ad L , ad semiperipheriam



HKM , tempus quo corpus H perveniet ad M . Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R , (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G , seu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG , arcubus HI , HK æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK , sive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad SR . Unde cum, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcibus

(*) In figurâ Prop. XLIX. intelligatur jungi rectam CA . Tum si recta AV sensim crescat, ut rectæ CA ultimò æqualis fiat, arcus EP ad ambitum circuli EPV eam ultimò rationem habebit, quam duplus arcus AB ad ambitum circuli AC . Unde angulus PEB duplo angulo ACB ultimò æqualis erit. Sed in omni magnitudine rectæ AV , angulus PEB duplo angulo PVB est æqualis. Ultimò

bus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitatibus LIBER
& arcus descripti in oscillationibus univ ersis. Quæ erant primò PRIMUS.

Oscillantur jam funipendula corpora in Cycloidibus diversis, intra globos diversos, quorum diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: & si vis absoluta globi cujusvis QOS dicatur v , vis acceleratrix, quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versus centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli à centro illo & vis absoluta globi conjunctim, hoc est, ut $co \times v$. Itaque lineola HY , quæ sit ut hæc vis acceleratrix $co \times v$, describetur dato tempore; & si erigatur normalis YZ circumferentiæ occurrens in Z , arcus nascens HZ denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens HZ in subduplicatâ ratione rectanguli GHY , ideoque ut $\sqrt{GH \times co \times v}$. Unde tempus oscillationis integræ in cycloide QRS (cùm sit ut semiperipheria HKM , quæ oscillationem illam integram denotat, directè; utque arcus HZ , qui datum tempus similiter denotat, inversè) fiet ut GH directè & $\sqrt{GH \times co \times v}$ inversè; hoc est, ob æquales GH & SR , ut $\sqrt{\frac{SR}{co \times v}}$, sive (per Corol. Prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times v}}$. Itaque oscillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & subduplicatâ ratione distantie inter punctum suspensionis & centrum globi inversè, & subduplicatâ ratione vis absolutæ globi etiam inversè. Q. E. I.

Corol. I. Hinc etiam oscillantium, cadentium & revolvantium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, quâ Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi transiens (*); & oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac rectâ. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale, quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum qua-

timò igitur, puncto v cum ipso c congruente, anguli BVP , BPA , sive BQP , BQA , inter se æquales fiunt. Congruet igitur recta CP ultimò cum rectâ CA positione datâ, et punctum rotæ P , quo in omni rotæ magnitudine Cyclois scribitur, erit ad rectam illam CA positione datam, et Cyclois ultimò in rectam illam migraverit.

drantalem describit. Est enim hoc tempus (per casum secundum) ad tempus semiofcillationis in Cycloide quâvis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam confectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenierunt. Nam si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphaerica in planum, visque centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu longitudo arcûs Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato finui verfo dimidii arcûs rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*: et Pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & æquali Cycloide temporibus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & descensus gravium, tempore ofcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

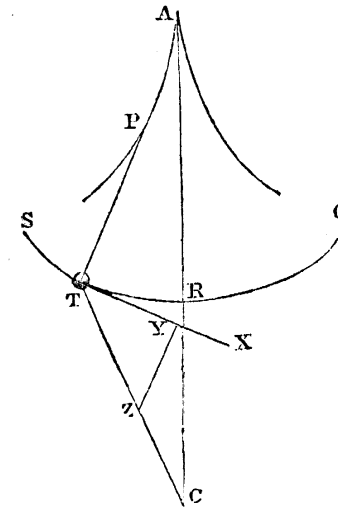
Aptantur autem propositiones à nobis demonstratæ ad veram constitutionem Terræ; quatenus rotæ, eundo in ejus circulis maximis, describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ suspensa, in Cycloidibus intra globos oscillari debent, ut ofcillationes omnes evadent ifochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrefcit in progressu à superficie terræ, sursum quidem in duplicatâ ratione distantiarum à centro ejus, deorsum verò in ratione simplici.

P R O P. LIII. P R O B. XXXV.

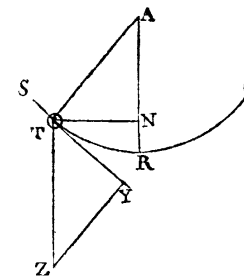
Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis ofcillationes semper ifochronas peragent.

Oscilletur corpus T in curvâ quâvis lineâ STRQ, cujus axis fit AR transiens per virium centrum, c. Agatur TX, quæ Curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inque hâc tangente TX capiatur TY æqualis arcui TR. Nam longitudo arcûs illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto Y educatur recta YZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit vis centripeta proportionalis rectæ TZ. Q. E. I.

Nam



tes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc si corpus T, filo rectilineo AT à centro A pendens, describat arcum circularem STRQ, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum à vi aliquâ, quæ sit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus TR ad ejus sinum TN: æqualia erunt ofcillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, similia erunt triangula ATN, ZTY; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN, hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT; vis TZ, quâ ofcillationes evadent ifochronæ, erit ad vim gravitatis AT, ut arcus TR, ipsi TY æqualis, ad arcûs illius sinum TN.

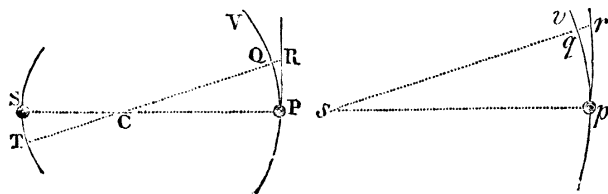
Corol. 2. Et propterea in horologiis, si vires, à machinâ in pendulum ad motum conservandum impressæ, ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea, quæ oritur applicando rectangulum sub arcu TR & radio AR ad sinum TN, ofcillationes omnes erunt ifochronæ.

A a 2

P R O P.

*similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus
iisdem describi.*

Revolvantur corpora s , p circa commune gravitatis centrum c , pergendo de s ad t , deque p ad q . A dato puncto s ipsis sp , tq æquales & parallelæ ducentur semper sp , sq ; & Curva pqv , quam punctum p , revolvendo circum punctum immotum s , describit, erit similis & æqualis Curvis, quas corpora s , p describunt circum se mutuò: proindeque (per Theor. xx.) similis curvis st & pqv ,



quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum c : idque quia proportionales linearum sc , cp , & sp , vel sq , ad invicem dantur.

Caf. 1. Commune illud gravitatis centrum c , per legem Corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primò, quòd id quiescit; inque s & p locentur corpora duo, immobile in s , mobile in p , corporibus s & p similia & æqualia. Dein tangent rectæ pr & pr Curvas pq & pq in p & p ; & producantur cq & sq ad r & r . Et ob similitudinem figurarum $cprq$, $spqr$ erit RQ ad rq ut cp ad sp , ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus p versus corpus s , atque ideo versus centrum intermedium c attrahitur, effiet ad vim, quâ corpus p versus centrum s attrahitur, in eadem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus pr , pr ad arcus pq , pq , per intervalla ipsis proportionalia RQ , rq ; ideoque vis posterior efficeret, ut corpus p gyraretur in Curvâ pqv , quæ similis effiet Curvæ pqv , in quâ vis prior efficit, ut corpus p gyretur; & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione cp ad sp , sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum s & s , p & p , & æqualitatem distantiarum sp , sp) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter tra-

hantur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius p tra-
hatur per intervallum majus rq , requiritur tempus majus, id-
que in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quòd (per
lemma decimum) spatia, ipso motû initio descripta, sunt in du-
plicatâ ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p
effe ad velocitatem corporis p in subduplicatâ ratione distantie sp
ad distantiam cp , eò ut temporibus, quæ sint in eadem subdu-
plicatâ ratione, describantur arcus pq , pq , qui sunt in ratione
integrâ: et corpora, p , p , viribus æqualibus semper attracta, de-
scribent circum centra quiescentia c & s figuras similes pqv , pqv ,
quarum posterior pqv similis est & æqualis figuræ, quam corpus
 p circum corpus mobile s describit. Q. E. D.

Caf. 2. Ponamus jam quòd commune gravitatis centrum, unâ
cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur unifor-
miter in directum; & (per legum Corollarium sextum) motus
omnes in hoc spatio peragentur ut prius; ideoque corpora descri-
bent circum se mutuò figuras easdem ac prius, & propterea figu-
ræ pqv similes & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantie suæ proportiona-
libus se mutuò trahentia, describunt (per Prop. x.) & circum
commune gravitatis centrum, & circum se mutuò, Ellipses con-
centricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires
distantie proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantie suæ reci-
procè proportionalibus, describunt (per Prop. xi, xii, xiii.) &
circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuò, sec-
tiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figu-
ræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur,
vires centripetæ sunt quadrato distantie reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum com-
mune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuò ductis
describunt areas temporibus proportionales.

P R O P. LIX. T H E O R. XXII.

*Corporum duorum s & p , circa commune gravitatis centrum c re-
volventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corpo-
ris alterutrius p , circa alterum immotum s gyrantis, & figuris,
quæ corpora circum se mutuò describunt, figuram similem & æ-
qualem*

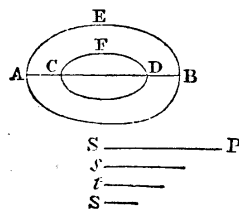
qualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius s , ad summam corporum $s+p$.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes pq & pq describuntur, sunt in subduplicatâ ratione distantiarum cp & sp , vel sp ; hoc est, in subduplicatâ ratione corporis s ad summam corporum $s+p$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes pq & pq describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicatâ ratione. Q. E. D.

PROP. LX. THEOR. XXIII.

Si corpora duo s & p , viribus, quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd Ellipseos, quam corpus alterutrum p hoc motu circa alterum s describit, axis principalis erit ad axem principalem Ellipseos, quam corpus idem p circa alterum quiescens s eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum $s+p$ ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum s .

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema superius) forent in subduplicatâ ratione corporis s ad summam corporum $s+p$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipseos autem axis principalis (per Prop. xv.) minuatur in ratione, cujus hæc est sesquuplicata, id est in ratione, cujus ratio s ad $s+p$ est triplicata; ideoque erit ad axem principalem Ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter $s+p$ & s ad $s+p$. Et inversè, axis principalis Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ



(*) SIT AEB Ellipsis ejus per omnia similis et æqualis, quam corpus p motu suo circum s scribit, sive ejus quam p circum s in fig. p. 192. Sitque CFD Ellipsis alia, ejus circuitum corpus p , circum umbilicum immobilem, eodem tempore absolvet, quo corpus p conversionem suam circum corpus s . Ellipseos autem primæ axis transversus sit AB; alterius, CD. Exponatur recta s datæ cujusvis longitudinis; aliaque sp , quæ ad datam s rationem eam habeat, quam summa corporum duorum, $s+p$, ad corpus s . Sint duæ, s , t , inter duas sp , s proportionem media. Dicit Newtonus rectam AB ad rectam CD proportionem habere eam quam sp ad s . Id verò hinc ferè argu-

scriptæ circa immobile, ut $s+p$ ad primum duorum mediè proportionalium inter $s+p$ & s . Q. E. D. (a).

LIBER
PRIMUS.

PROP. LXI. THEOR. XXIV.

Si corpora duo viribus quibuscumque se mutuò trahentia, neque aliàs agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque à corpore tertio, in communi gravitatis centro constituto, viribus iisdem traheretur: et virium trahentium eadem erit lex, respectu distantie corporum à centro illo communi, atque respectu distantie totius inter corpora.

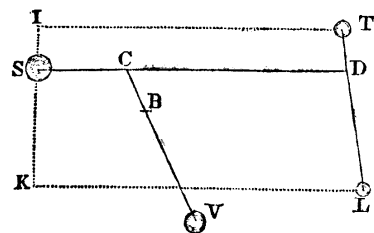
Nam vires illæ, quibus corpora se mutuò trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eadem sunt, ac si à corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam datur ratio distantie corporis utriusvis à centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cujusvis potestatis distantie unius ad eandem potestatem distantie alterius; ut & ratio quantitatis cujusvis, quæ ex unâ distantia & quantitatibus datis utcumque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ distantia, & quantitatibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus, similiter derivatur. Proinde si vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, sit directè vel inversè ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantie potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè, ut corporis attracti distantia à centro illo communi; vel ut eadem distantie hujus potestas; vel denique ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitatibus datis similiter derivata. Hoc est, vis trahentis eadem erit lex, respectu distantie utriusque. Q. E. D.

mentis probat. Cum corpora p , in eisdem viribus centralibus per Ellipses AEB, CFD ferantur, (id enim omnino ponendum est) duplicata temporum conversionum ratio, axium triplicata erit (per Prop. xv.) At verò ratio corporum $s+p$ ad corpus s , sive rectæ sp ad rectam s , duplicata est ejus quam tempus conversionis corporis p per AEB habet ad tempus conversionis per CFD (per Theorema novissimum.) Quare cubus ex AB erit ad cubum ex CD ut recta sp ad rectam s ; sive ut cubus ex sp ad cubum ex s . Quare AB:CD = $sp:s$. Q. E. D.

De Motu
Corporum

faciendo, ut systema corporum T & L ex una parte, & corpus s



ex alterâ, iustis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum c. Tali motu corpus s, cò quòd summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantiae cs proportionalium, tendit versus centrum c, describit Ellipsin circa idem c; &

punctum d, ob proportionales cs, cd, describet Ellipsin consimilem n è regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, prius priore, posterius posteriore, æqualiter & secundum lineas parallelas TI & LK, ut dictum est, attracta, pergent (per legum Corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile d ellipses suas describere, ut prius. Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum v, & simili argumento concludetur hoc & punctum c Ellipses, circa omnium commune centrum gravitatis B, describere, manentibus motibus priorum corporum T, L & s circa centrum d & c, sed acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita se habent, etsi corpora T & L trahunt se mutuò viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus, quàm quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunt mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiae ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur, quòd corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili describunt. Q. E. I.

PROP. LXV. THEOR. XXV.

Corpora plura, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in Ellipsis; & radiis ad umbilicos ductis, areas describere temporibus proportionales quàm proximè.

In Propositione superiore demonstratus est casus, ubi motus plures peraguntur in Ellipsis accuratè. Quo magis recedit lex virium

virium à lege ibi positâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest, ut corpora, secundum legem hîc positam se mutuò trahentia, moveantur in Ellipsis accuratè, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. Insequentibus autem casibus non multum ab Ellipsis errabitur.

Caf. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod, ad varias ab eo distantias, revolvi; tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum Corol. quartum) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibilibiter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum, sine errore sensibili; minora autem revolvantur circa hoc maximum in Ellipsis, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuò. Diminui autem possunt corpora minora, usque donec error iste, & actiones mutuæ sint datis quibuscvis minores; atque ideo donec orbes cum Ellipsis quadrent, & areas respondeant temporibus, sine errore, qui non sit minor quovis dato. Q. E. O.

Caf. 2. Fingamus jam systema corporum minorum, modo jam descripto circa maximum revolvantium, aliudve quodvis duorum, circum se mutuò revolvantium, corporum systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quòd, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motûs attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; & augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum

hoc est (uti jam exposui) ubi attractio SN non est multò major, neque multò minor attractione SK . Q. E. D.

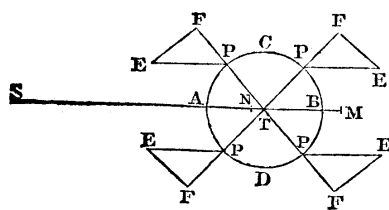
Corol. 1. Ex his facillè colligitur, quòd, si corpora plura minora P , S , R , &c. revolvantur circa maximum T , motus corporis intimi P minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitur, atque cætera à se mutuò.

Corol. 2. In systemate vero trium corporum T , P , S , si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum; corpus P , radio PT , aream circa corpus T velocius describet prope conjunctionem A & oppositionem B , quàm prope quadraturas C , D . Namque vis omnis quâ corpus P urgetur & corpus T non urgetur, quæque non agit secundum lineam PT , accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigatur. Talis est vis NM . Hæc in transitu corporis P à C ad A tendit in consequentia, motumque accelerat; dein usque ad D in antecedentia, & motum retardat; tum in consequentia usque ad B , & ultimò in antecedentia transeundo à B ad C ($^{\circ}$).

Corol. 3. Et eodem argumento patet, quòd corpus P , cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppositione quàm in quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis P , cæteris paribus, curvior est in quadraturis quàm in conjunctione & oppositione. Nam corpora velociora minùs deflectunt à recto tramite. Et præterea vis KL , vel NM , in conjunctione & oppositione contraria est vi, quâ corpus T trahit corpus P ; ideoque vim illam minuit; corpus autem P minùs deflectet à recto tramite, ubi minùs urgetur in corpus T .

Corol.



($^{\circ}$) Tota vis LM agit secundum rectam PT , et niti in ipsis conjunctionibus pars aliqua alterius vis NM . Nam per P , centrum corporis P , agatur PE cum recta TS parallela, et capiatur PE æqualis rectæ NM , modò centrum corporis S situm sit in plano orbitæ $ADBC$. Per E agatur EF cum recta illâ, quæ orbitam in P contingat, parallela. Ita vis NM , sive PE , resolvitur in duas PF , FE ; quarum PF , cùm secundum rectam PT agat, velocitatem descriptionis

Corol. 5. Unde corpus P , cæteris paribus, longius recedet à corpore T in quadraturis, quàm in conjunctione & oppositione. Hæc ita se habent exclusò motu excentricitatis. Nam si orbita corporis P excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsidæ sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus P , ad apsidem summam appellans, abfit longius à corpore T in syzygiis quàm in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T , quâ corpus P retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis LM , ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis KL , & ob magnitudinem vis KL , magis diminuitur quàm augetur; est autem vis illa centripeta (per Corol. 2. Prop. IV.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii TP directe & ratione duplicatâ temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis KL ; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius TP , augeri, idque in subduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minùs quàm in radii hujus ratione sesquuplicatâ (per Corol. 6. Prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus P minùs femper & minùs attractum perpetuò recederet longius à centro T ; & contrâ, si vis illa augetur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S , quâ vis illa diminuitur, augeatur ac diminuat per vices: augebitur simul ac diminuetur radius TP per vices; & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione sesquuplicatâ radii, & ratione subduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T , per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S , diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam, quòd Ellipseos à corpore P descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen pro-

scriptionis areæ nihil mutat. Altera, TE , auget velocitatem illam, dum à C ad A , vel à D ad B corpus transeat; minuit vicissim, corpore ab A in C , vel à B in D transeunte. Quod figura ipsi, ni fallor, satis monstrat. Quòd si corpus S extra planum orbitæ $ADBC$ situm fuerit, tamen partem illam vis NM , quæ cum plano orbitæ parallela sit, in duas resolvendo, quarum altera agat secundum rectam TP , altera secundum rectam quæ parallela sit cum ea quæ orbitam in P contingit, eadem ferè efficiuntur.

greditur,

greditur, & per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripetâ, quâ corpus T trahit corpus P . Vis prior LM , si augeatur distantia PT , augetur in eadem ferè ratione cum hâc distantia; & vis posterior decrescit in duplicatâ illâ ratione: ideoque summa harum virium decrescit in minore quàm duplicatâ ratione distantiae PT , & propterea (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut aux, seu apsis summa, regrediatur. In conjunctione verò & oppositione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T , differentia est inter vim, quâ corpus T trahit corpus P , & vim KL ; & differentia illa, propterea quòd vis KL augetur quamproximè in ratione distantiae PT , decrescit in majore quàm duplicatâ ratione distantiae PT , ideoque (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In locis inter syzygias & quadraturas pendet motus augis ex causâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa, vel regrediatur. Unde cum vis KL in syzygiis sit quasi duplo major quàm vis LM in quadraturis, excessus erit penes vim KL , transferetque augem in consequentia^(d). Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligitur, concipiendo systema corporum duorum T , P corporibus pluribus s , s , s , &c. in orbe ESE consistentibus, undique cingi. Namque horum actionibus actio ipsius T minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicatâ distantiae.

Corol. 8. Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ facto in majore vel minori quàm duplicata ratione distantiae TP , in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut & à simili incremento in reditu ad apsidem imâ; atque ideo maximus fit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maxime recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est, quòd apsidem in syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu $NM - LM$, progredientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam LM ^(e). Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.

^(d) Vide Lib. 3. Prop. xxv & xxvi.

Corol.

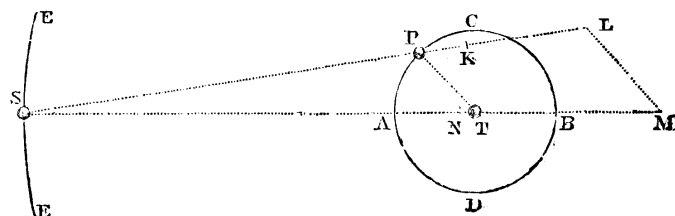
Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciproce proportionali quadrato distantiae suæ à centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipfi; & mox, in descensu ab apside summâ, seu auge, ad apsidem imâ, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augetur in ratione plusquam duplicatâ distantiae diminutæ: manifestum est, quòd corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsu semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quàm si urgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiae diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interiorem, & in apside imâ propius accederet ad centrum quàm prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab apside imâ ad apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus antè creverat, rediret corpus ad distantiam priorem; ideoque si vis decrescat in majore ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem, & sic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper excentricitas; & contrâ, diminuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam verò in systemate corporum T , P , s , ubi apsidem orbis PAB sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est; & maxima fit, ubi apsidem sunt in syzygiis. Si apsidem constituentur in quadraturis, ratio prope apsidem minor est, & prope syzygias major quàm duplicata distantiarum; & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter apsidem, hæc minor est quàm duplicata distantiarum. Vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in minore quàm duplicatâ ratione distantiae apsidis summæ ab umbilico Ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico: & contrâ, ubi apsidem constituentur in syzygiis, vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in majore quàm duplicatâ ratione distantiarum. Nam vires LM in quadraturis additæ viribus corporis T component vires in ratione minore, & vires KL in syzygiis subductæ à viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter apsidem, minima

^(e) Nempe cum vis KL in syzygiis maxima sit, vis LM in quadraturis tantum non ad nihilum redacta sit.

in

DE MOTU
CORPORUM

junctim (f), hoc est, si detur tum distantia PT , tum corporis s vis soluta, ut ST cub. reciproce; sint autem vires illæ NM , ML causæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus Corollariis: manifestum est, quod effectus illi omnes, stante corporum T & P systemate, & mutatis tantum distantia ST



& vi absolutâ corporis s, sint quamproximè in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis s, & ratione triplicatâ inversâ distantix st. Unde si systema corporum t & p revolvatur circa corpus longinquum s; vires illæ NM, ML, & earum effectus erunt (per Corol. 2 & 6. Prop. IV.) reciproçè in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, si magnitudo corporis s proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ NM, ML, & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis s è corpore t spectati, & vice versâ. Namque hæ rationes eadem sunt, atque ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus orbium ESE & PAB formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum s & T vel maneat, vel mutantur vires in datâ quâvis ratione; hæ vires (hoc est, vis corporis T, quâ corpus P de recto tramite in orbitam PAB deflectere, & vis corporis s, quâ corpus idem P de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt semper eodem modo, & eadem proportionē: necesse est, ut similes

(¹) Vis ML est ad vim SK sicut recta ML ad rectam SK ; hoc est, si permagna fuerit corporis S distantia, ut TP ad ST , illis utique ML , TP , necnon SK , ST , quando distantia ST infinitè augetur, ipsam æqualitatis rationem ultimò induentibus. Hinc si litera A designet vim SK , erit vis $ML = \frac{A \times PT}{ST}$. Unde satis constat ratio illa composita virium ML , quam Newtonus allegavit. Rursum distantia ST infinitè aucta, rectæ MT , PL ultimo parallele & æquales fiunt. Quare et recta NM rectæ PL æqualis erit: nam si corpora T , P viribus eisdem pro distantiarum ratione, versus S urgeantur, id quod ponendum est, punctum N ultimò cum ipso T congruet. Quare recta NM rectæ PL ultimò æqualis fiet. Distantia autem ST infinitè aucta, recta PL triplæ rectæ PK æqualis erit. Nimirum

res & proportionales sint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri; angulares verò, iidem qui priùs; & errorum linearium similium, vel angularium æqualium, tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur orbium formæ & inclinatione ad invicem, & mutantur utcumque corporum magnitudines, vires & distantie; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quàm proximè: sed brevius hæc methodo. Vires NM, ML, cæteris flantibus, sunt ut radius TP, & harum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. x.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis P; & hinc errores angulares è centro T spectati (id est, tam motus augis & nodorum, quàm omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt, in quâlibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revolutionis quàm proximè (§). Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14. & in quolibet corporum T, P, S systemate, ubi P circum T sibi propinquum, & T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inversè. Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis PAB non mutantur motus augis & nodorum sensibilibiter, nisi ubi eadem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cùm autem linea LM nunc major fit nunc minor quàm radius PT, exponatur vis mediocris LM per radium illum

Nimirum cum SL sit ad SK ut quadratum ex SK ad quadratum ex SP , atque ipse SK , SP tantum non æquales sint. Inde enim sequetur duarum SL , SK differentiam, KL , duplici effe PK , quæ duarum SK , SP differentia est. Quare tota PL ejusdem PK tripla erit. Dato autem angulo PTA , propter angulum ad K juncti PK rectum, ratio rectæ PK ad PT data erit. Quare et triplæ PK , five illius PL , vel NM , ad PT ratio data. Sed PT , LM ultimo æquales. Ratio igitur NM ad ML habita. Quare et vis NM ad viam ML ratio dabitur. Quam igitur vires ML inter fe rationem habebant, eandem alteræ illæ NM habituræ sunt. Unde constat id quod à Newtono affirmatum est.

(²) Nam errores angulares rationem inter fe habebunt linearium directam, cum contrariâ radiorum TP compositam.

(*) Nam errores angulares rationem inter se habebunt linearium directam, cum contrariâ radiorum TP compositam.

De Motu
Corporum

PT; & erit hæc ad vim mediocrem SK, vel SN, (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST. Est autem vis mediocris SN vel ST, quâ corpus T retinetur in orbe suo circum S, ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T, in ratione compositâ ex ratione radii ST ad radium PT, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S ^(h). Et ex æquo, vis mediocris LM ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T (quâve corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad distantiam PT revolvi possit) est in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unâ cum distantia PT, datur vis mediocris LM; & eâ datâ, datur etiam vis MN quamproximè, per analogiam linearum PT, MN.

Corol. 18. Iisdem legibus, quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguâ factis conflari annulum fluidum, rotundum, ac corpori T concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis P peragendo, propius accedent ad corpus T, & celerius movebuntur in conjunctione & oppositione ipsarum & corporis S, quàm in quadraturis. Et nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum plano orbitæ corporis S vel T, quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antecedentia, & velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completâque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis T, ex materiâ non fluidâ constantem, ampliari & extendi usque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor, per vices acceleratus & retardatus, ut in superiore Corollario, in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior, quàm superficies globi, & sic fluet in alveo refluatque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis S, nullum acquireret motum fluxûs & refluxûs. Par est ra-

^(h) Prop. IV. Cor. 2.

tio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum suum (per legum Corol. 5.) ut & globi de cursu rectilineo uniformiter tracti (per legum Corol. 6.) Accedat autem corpus S, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad syzygias; & vis KL trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus, & faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas: nisi quatenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, cessabit motus fluendi & refluendi: sed oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie suâ contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli, globo orbat, maximus inclinationis angulus est, ubi nodi sunt in syzygiis. Inde in progressu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit globo toti. Retinet globus motum impressum, usque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: atque hæc ratione maximus decrescens inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus post quadraturas; dein maximus reelinclationis motus in syzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem est ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quàm juxta polos, vel constet ex materiâ paulo densiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcentis Corollarii vix inde mutabuntur; nisi quòd loca maximarum & minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur & permanet, non per

DE MOTU
CORPORUM

per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorsum maximè in quadraturis, & vis KL seu NM – LM trahit eandem fursum maximè in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ definunt trahere aquam deorsum, & incipiunt trahere aquam fursum in octantibus ante syzygias; ac definunt trahere aquam fursum, incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, & minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quatenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus, vel per vim insitam aquæ paulo diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulo citius sistatur.

Corol. 21. Eadem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem verò diminuitur, & per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si globus juxta æquatorem vel depresso reddatur, vel rarior quàm juxta polos, oriatur motus nodorum in consequentia.

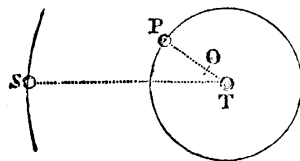
Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, & motus sit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in spatiis liberis primò quiescere; dein impetu quocunque, obliquè in superficiem suam facto, propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, quàm in alium quemvis; perspicuum est, quòd is axem suum, axisque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. Impellatur jam globus obliquè, in eadem illâ superficie parte, quâ priùs, impulsu quocunque novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est, quòd hi duo impulsus, successivè impressi, eundem producent motum, ac si simul impressi fuissent; hoc est, eundem, ac si globus vi simplici ex utroque (per legum Corol. 2.) compositâ impulsus fuisset, atque ideo simplicem, circa axem inclinatione datum. Et par est

est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æqua-
tore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis
in æquatore motus, quem impulsus secundus sine primo genera-
ret; atque ideo impulsuum amborum factorum in loca quæcun-
que: generabunt hi eundem motum circularem, ac si simul &
semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos
seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogene-
us & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos
omnes componit, & ad unum reducit; & quatenus in se est, gy-
ratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, in-
clinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta incli-
nationem axis, aut rotationis velocitatem, mutare potest. Si
globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in quod
vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria;
urgetur semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, &
propterea globum, quoad motum rotationis, nullam in partem
inclinabit. Addatur verò alicubi inter polum & æquatorem ma-
teria nova, in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu
recedendi à centro sui motus, turbabit motum globi, facietque
ut poli ejus errent per ipsius superficiem, & circulos circum se
punctumque sibi oppositum perpetuò describant. Neque corri-
getur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in
polo alterutro, quo in casu (per Corol. 21.) nodi æquatoris pro-
gredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per Corol. 20.) nodi
regredientur; vel denique, ex alterâ axis parte addendo materiam
novam, quâ mons inter movendum libretur; & hoc pacto nodi
vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova
materia sunt vel polo, vel æquatori, propiores.

P R O P. LXVII. T H E O R. XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quòd corpus exterius s, circa interiorum P, T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam Ellipseos, umbilicum in centro eodem habentis, magis accedentem, quàm circa corpus intimum. & maximum T, radiis ad ipsum ductis, describere potest.

Nam corporis s attractiones versus T & P componunt ipsius attractionem



attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum, O, quàm in corpus maximum T, quæque quadrato distantie SO magis est proportionalis reciproce, quàm quadrato distantie ST: ut rem perpendenti faciliè constabit.

PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quòd corpus exterius s, circa interiorum P & T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam Ellipseos, umbilicum in centro eodem habentis, magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitur, quàm si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitur.

Demonstratur eodem ferè modo cum Prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus s conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus s ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum à centro, in quod tertium s attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum & maximum T, lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis T, moveri incipit, & magis deinceps magisque agitur.

Corol.

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quòd orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directè & quadrata distantiarum inversè, se mutuò trahant agentque, & orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum, & sic deinceps) quàm si corpus intimum quiescat, & statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROP. LXIX. THEOR. XXIX.

In systemate corporum plurium A, B, C, D, &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum à trabente; & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum à trabente: erunt absolute corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D versus A, paribus distantis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus B, paribus distantis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis A ad vim absolutam attractivam corporis B, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus B, paribus distantis; & ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B. Sed attractio acceleratrix corporis B versus A est ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ut massa corporis A ad massam corporis B; propterea quòd vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam & octavam) sunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis A est ad ab-

Vol. II.

E e

solutam

solutam vim attractivam corporis B, ut massa corporis A ad massam corporis B. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciproce, vel directe, in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum à trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsis, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quàm fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quàm maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & contrà. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hîc generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuò

(*) Nam si à punctis I, K in rectas HP, PL intelligantur rectæ ad perpendicularum deduci, deductæ illæ rectarum IP, PK inter se proportionem gerent; utpote quæ angulorum ad P æqualium sunt sinus pro radiis inæqualibus IP, PK. Sed, propter circum, IP:PK=HP:PL. Quare rectæ à punctis I, K in rectas HP, PL ad perpendicularum deductæ, eæ ipsarum HP, PL inter se proportionem gerent; et in omni magnitudine angulorum circum P ista proportionum similitudo manebit.

Evanescentibus

petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive^{LIBER PRIMUS.} is ab actione ætheris, aut aëris, mediæ cujuscunque, seu corporei seu incorporei, oriatur, corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportionales mathematicas in hoc tractatu expendens, ut in definitionibus explicui. In Mathefi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positæ consequuntur: deinde, ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuò agere; & quales motus inde consequantur.

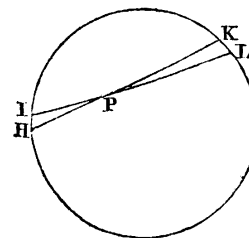
SECTIO XII.

De corporum sphæricorum viribus attractivis.

PROP. LXX. THEOR. XXX.

Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum, intra superficiem constitutum, his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit HIKL superficies illa sphærica, & P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK, IL, arcus quàm minimos HI, KL intercipientes; &, ob triangula HPI,



LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantis HP, LP proportionales^(a); & superficiei sphæricæ particulæ quævis ad HI & KL, rectis per punctum P transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ

Evanescentibus igitur angulis IPH, KPL, deductæ illæ simul evanescentes rectarum HP, PL rationem vel ultimò servabunt. Sed evanescentibus angulis illis, arcus IH, KL evanescent, & deductarum rationem ultimò induunt. Nempe cum arcus illi sint ultimò ad deductas, ut radius ad sinus angulorum IHP, KLP ultimò æqualium. Deductarum igitur ratio ultima, cu arcuum inter ipsos ultima erit. Erunt igitur arcus HI, KL ultimò inter se, sicut rectæ HP, PL.

E e 2

directè,

directè, & quadrata distantiarum inversè. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuò destruant. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphæricam superficiem à contrariis attractionibus destruantur. Proinde corpus p nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.

PROP. LXXI. THEOR. XXXI.

Isdem positis, dico quòd corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphærae, vi reciproce proportionali quadrato distantiae suæ ab eodem centro.

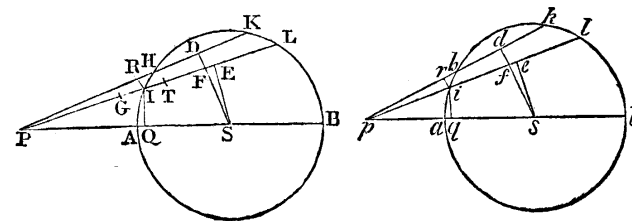
Sint $AHKB$, $abkb$ æquales duæ superficies sphæricæ, centris s , s , diametris AB , ab descriptæ, & P , p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur à corpusculis lineæ PHK , PIL , phk , pil , auferentes à circulis maximis AHB , abk , æquales arcus HK , hk , & IL , il : et ad eas demittantur perpendiculara SD , sd ; SE , se ; IR , ir ; quorum SD , sd secant PL , pl in F & f : demittantur etiam ad diametros perpendiculara IQ , iq . Evanescent anguli DPE , dpe : & ob æquales DS & ds , ES & es ; lineæ PE , PF , & pe , pf ; & lineolæ DF , df , pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE , dpe simul evanescentibus, est æqualitatis.

(^b) *Et conjunctis rationibus.* Quæ sequuntur ad argumenta purioris Geometriæ hoc modo revocari possint.

Capiatur rg ad quam PF rationem habeat quam pf ad pi ; et PT ad quam PS rationem habeat eam quam ps ad pi . Jam cum ih habeat ultimò ad ib rationem eam, quam rectangulum $PI \times pf$ ad rectangulum $PF \times pi$; five eam, quæ componitur è rationibus rectæ PI ad rectam PF , rectæque pf ad pi ; harum verò posterior, ea utique quam pf habet ad pi , eadem sit quam PF habet ad PI : idcirco habebit ih ad ib ultimò rationem quæ componitur è rationibus rectæ PI ad PF rectæque PF ad PI ; eam igitur quam PI ad PF . Simili modo, eo quòd iq sit ad iq ut rectangulum $PI \times ps$ ad rectangulum $PS \times pi$, quòdque ps sit ad pi ut ps ad pi ; obtinebimus iq esse ad iq ut PI ad PI . Cum igitur sit ih ad ib ut PI ad PI , et iq ad iq ut PI ad PI , erit rectangulum $ih \times iq$ ad rectangulum $ib \times iq$, ultimò scilicet angulis HPI , hpi infinitè imminutis, ut quadratum ex PI ad rectangulum $PG \times PT$. At verò ratio illa, quam, angulis HPI , hpi infinitè imminutis, evanescentia illa $ih \times iq$, $ib \times iq$ inter se ultimam habent, ea zonarum quoque evanescentium, quarum latitudines sunt arcus ih , ib , ultima inter ipsas erit. Quare zona evanescentis, cujus latitudo arcus ib , erit ultimò ad zonam evanescentem, cujus latitudo ib , ut quadratum ex PI ad rectangulum $PG \times PT$. Eademque partium similium harum zonarum ultima erit inter ipsas ratio. Planis igitur circulo- sphericarum cum corporum centris conjungunt, talium inquam circularum planis dividi intelligantur illæ zonæ in partes similes. Exponatur recta A datæ cujusvis longitudinis; sitque alia a eâ lege mutabilis, ut latitudinibus zonarum quovis modo mutatis, necnon partium utriusque simili-
um magnitudinibus, recta a habeat ad alteram A rationem eam, quam vires, quibus zonæ ib pars aliqua, ex iis in quas eam dividi posuimus, corpus p sollicitat, ad vires quibus pars cognata zonæ ih sollicitat corpus P . Latitudinibus zonarum infinitè imminutis, necnon partium, in quas simili-

liter

æqualitatis. His itaque constitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF , & $LIBER PRIMUS.$
 pf ad pi ut df vel DF ad ri ; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri , hoc est (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus ih ad arcum ib .



Rursus PI ad PS ut IQ ad SE , & ps ad pi ut se vel SE ad iq ; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq . Et conjunctis rationibus (^b) PI quad. $\times pf \times ps$ ad pi quad. $\times PF \times PS$, ut $ih \times iq$ ad $ib \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam arcus ih convolutione femicirculi AKB circa diametrum AB describet, ad superficiem circulearem, quam arcus ib convolutione femicirculi akb circa diametrum ab describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P & p , sunt (per hypothesin) ut ipsæ superficies directè, & quadrata distantiarum superficialium à corporibus inversè, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ

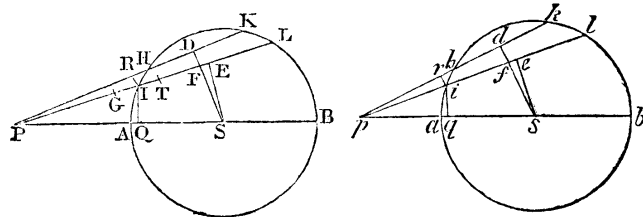
liter sunt divisæ, magnitudinibus, numero scilicet partium illarum infinitè aucto, vires, quibus præditæ sunt zonarum partes cognatæ planis LPE , KPB , lpe , kpb interceptæ, evanescentibus utique angulis KPL , kpl , corpora P , p secundum rectas PI , pi ultimò totæ trahunt. Unde rationem inter se ultimò habebunt eam, quæ componitur è rationibus partium illarum directâ, distantiarumque PI , pi duplicatâ contrariè sumptâ; hoc est, eam quæ componitur è rationibus quadrati ex PI ad rectangulum $PG \times PT$, quadratigque ex pi ad quadratum ex PI . Invertendo, vis, quâ ultimò pars zonæ ib , planis lph , lpb interceptæ, trahit corpus p secundum rectam pi , ad vim, quâ ultimò cognata pars zonæ ih trahit corpus P secundum rectam PI , rationem habet quæ componitur è rationibus rectanguli $PG \times PT$ ad quadratum ex PI , quadratigque ex PI ad quadratum ex pi ; hoc est eam, quam rectangulum $PG \times PT$ ad quadratum ex pi ; five eam, quæ componitur è rationibus rectæ PG ad pi rectæque PT ad pi ; hoc est, è rationibus rectæ PF ad pi , rectæque PS ad ps (nempe cum sit $PF : PG = pf : pi$, et $PS : PT = ps : pi$) hoc est, eam quam rectangulum $PF \times ps$ habet ad rectangulum $pf \times pi$. Eademque rectarum a , A erit ratio ultima. Sint a , A rectæ, ad quas a , A rationes singulatim habeant eas, quas vires totæ, quibus trahuntur corpora P , p secundum rectas PI , pi à zonarum partibus cognatis infinitè imminutis, ad virum illarum partes illas, quæ, resolutione virum per legem Cor. 2. factâ, ad centra sphærarum tendunt. Erit igitur A ad B ut PI ad PQ , five ut PS ad PF . Et a ad b ut pi ad pq , five ut ps ad pf .

Jam verò cum sit $B : A = PF : PS = PF \times ps : PS^2$
et $A : a = pf \times pi : PF \times PS$ (ex modo ostensâ) ex æquo perturbatè erit
 $B : a = pf \times pi : PS^2$. Unde cum sit etiam $a : b = ps : pf = ps^2 : pf \times pi$ ex æquo perturbatè erit
 $B : b = ps^2 : ps^2$.

Vi res igitur quibus cognatæ sphæricarum superficialium partes corpora P , p versus centra trahunt, rationem duplicatè distantiarum à centris contrariam inter se gerunt. Et cum simili argumento de quibusvis partibus cognatis idem obtinendum sit, vires, quibus superficies totæ corpora versus centra trahant, eandem inter se rationem gerent. (Geometr. Flux. Th. IV.)

vires

DE MOTU
CORPORUM vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (factâ per legum Corol. 2. resolutione virium) secundum lineas ps , ps ad centra tendunt, ut



PI ad PQ , & pi ad pq ; id est (ob similia triangula PIQ & PSF , piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf . Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus s ad attractionem corpusculi p versus s , ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times ps}{pi}$, hoc est, ut ps quad. ad ps quad. Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum KL , kl descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut ps quad. ad ps quad. inque eâdem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphaerica, capiendo semper sd æqualem se , & se æqualem se , distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphaericarum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. Q. E. D.

P R O P. LXXII. T H E O R. XXXII.

Si ad sphaeræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrecentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; ac detur tum sphaeræ densitas, tum ratio diametri sphaeræ ad distantiam corpusculi à centro ejus: dico quòd vis, quâ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphaeræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim à sphaeris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & distantias eorum à sphaerarum centris proportionales esse diametris sphaerarum respectivè, sphaeras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphaeræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphaeræ alterius, in ratione compositâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ distantiarum

tiarum inversè. Sed particulae sunt ut sphaeræ, hoc est, in ratione triplicatâ diametrorum; & distantiae sunt ut diametri; & ratio prior directè unâ cum ratione posteriore bis inversè est ratio diametri ad diametrum.

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis, circa sphaeras ex materiâ æqualiter attractivâ constantes, revolvantur; sintque distantiae à centris sphaerarum proportionales earundem diametris: tempora periodica erunt æqualia.

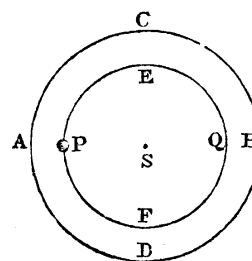
Corol. 2. Et vice versâ, si tempora periodica sunt æqualia; distantiae erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Prop. iv.

Corol. 3. Si ad solidorum duorum quorumvis, similium & æqualiter densorum, puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrecentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; vires, quibus corpuscula, ad solida illa duo similiter fita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri solidorum.

P R O P. LXXIII. T H E O R. XXXIII.

Si ad sphaeræ alicujus data puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrecentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quòd corpusculum intra sphaeram constitutum attrahitur vi proportionali distantiae suæ ab ipsius centro.

In sphaerâ $ABCD$, centro s descriptâ, locetur corpusculum P ;



& centro eodem B , intervallo SP , concipe sphaeram interiorem $PEQF$ describi. Manifestum est (per Prop. LXX.) quòd sphaericæ superficies concentricæ, ex quibus sphaerarum differentia $AERF$ componitur, attractionibus suis per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus P . Restat sola attractio sphaeræ interioris $PEQF$. Et (per Prop. LXXII.) hæc est ut distantia ps . Q. E. D.

Scholium.

Superficies, ex quibus solida componuntur, hîc non sunt purè mathematicæ,

DE MOTU
CORPORUM

mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphaera ultimò constat, ubi orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies, & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

P R O P. LXXIV. T H E O R. XXXIV.

Isdem positis, dico quòd corpusculum extra sphaeram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro.

Nam distanguatur sphaera in superficies sphaericas innumeras concentricas; & attractiones corpusculi, à singulis superficiibus oriundæ, erunt reciproce proportionales quadrato distantie corpusculi à centro (per Prop. LXXI.) Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in sphaeram totam, in eadem ratione. Q. E. D.

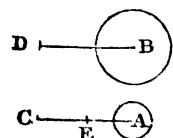
Corol. 1. Hinc in æqualibus distantis à centris homogenearum sphaerarum attractiones sunt ut sphaeræ (\propto). Nam (per Prop. LXXII.) si distantie sunt proportionales diametris sphaerarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illà ratione; &, distantis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatà illà ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatà illà ratione, hoc est, in ratione sphaerarum.

Corol. 2. In distantis quibuscumque attractiones sunt ut sphaeræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphaeram homogeneam positum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro, constet autem sphaera ex particulis attractivis; de-

crescet

(\propto) Sint sphaeræ homogeneæ A, B, et ad æquales à centris earum distantias collocata puta corpora c, d. Dicit Newtonus vim, quæ corpus c urgetur versus centrum sphaeræ A, esse ad vim, quæ corpus d urgetur versus centrum sphaeræ B, sicut sphaera ipsa A ad ipsam B. Capiatur enim AE quæ sit ad BD vel illi æqualem ac ut diameter sphaeræ A ad diametrum sphaeræ B; et in ipso puncto e collocatum puta corpus tertium. Jam vis quæ corpus d urgetur versus B erit ad vim quæ corpus e urgetur versus A ut diameter sphaeræ B ad diametrum sphaeræ A (per Prop. LXXVII.) Et vis quæ corpus e urgetur versus A erit ad vim quæ corpus c urgetur versus A, ut quadratum ex AC ad quadratum AE, hoc est, ut quadratum à diametro sphaeræ B ad quadratum à diametro sphaeræ A. Ex æquo vis quæ corpus d urgetur versus B ad vim quæ corpus c urgetur versus A rationem habet quæ componitur à rationibus diametri sphaeræ B ad diametrum sphaeræ A, quadraticque ex diametro



crefcet vis particulæ cujusque in duplicatâ ratione distantie à LIBER
particulâ. PRIMUS.

P R O P. LXXV. T H E O R. XXXV.

Si ad sphaeræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrefcetes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; dico quòd sphaera quævis alia similis ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantie centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantie suæ à centro sphaeræ trahentis (per Prop. LXXIV.) & propterea eadem est, ac si vis tota attrahens maneret de corpusculo unico sito in centro hujus sphaeræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modò illud à singulis sphaeræ attractæ particulis eadem vi traheretur, quæ ipfas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato distantie suæ à centro sphaeræ; ideoque huic æqualis attractio sphaeræ est in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones sphaerarum, versus alias sphaeras homogeneas, sunt ut sphaeræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum fuorum à centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphaera attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi, quæ ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque, cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quàm punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuae, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent, ubi

diametro sphaeræ B ad quadratum ex diametro sphaeræ A; hoc est eam, quæ est cubi ex diametro sphaeræ B ad cubum ex diametro sphaeræ A; sive eam, quæ est sphaeræ ipsius B ad sphaeram ipsam A. Q. E. D. (*Eadem feri in notis suis MSS. Gregorius.*)

Cor. H. 1. In æqualibus distantis à centris sphaerarum, quarum densitates sint diversæ, singularum tamen uniformis, attractiones erunt inter se ut sphaerarum corpora; hoc est, ut sphaeræ & densitates conjunctim.

Cor. H. 2. Vis, quæ sphaera quælibet homogenea corpusculum quodvis, ad datam à centro distantiam positum, in centrum trahit, eadem est, ac si materia omnis sphaeræ in ipso centro congregata esset. Nam, radio sphaeræ sensim se contrahente, puta concretionem quâdam materię effici, ut corpus maneat. Manebit igitur vis attrahendi (per Cor. H. 1.) Et si radio ad minimum redacto corpus usque maneat, manebit usque cum corpore vis attrahendi.

VOL. II.

F f

sphaera

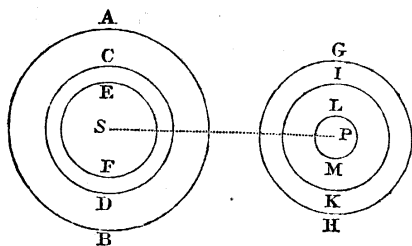
sphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra sphæram.

Corol. 4. Ea verò, quæ de motu corporum circa centrum conicarum sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra sphæram.

P R O P. LXXVI. T H E O R. XXXVI.

Si sphæra in progressu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcumque dissimilares, in progressu verò per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sunt undique similes; & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantie corporis attracti: dico, quòd vis tota, quâ hujusmodi sphæra una attrahit aliam, sit reciproce proportionalis quadrato distantie centrorum.

Sunto sphære quotcunque concentricæ similes AB, CD, EF, &c. quarum interiores additæ exterioribus component materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV.) trahent sphæras alias quotcunque concentricas similes GH, IK, LM, &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantie sp. Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias; hoc est, vis, quâ sphæra tota, ex concen-



tricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita, AB, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam, GH; erit in eâdem ratione. Augeatur numerus sphærarum con-

centricarum in infinitum, sic ut materiæ densitas unâ cum vi attractivâ, in progressu à circumferentiâ ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel decrescat; & additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis densitas deficiens, eò ut sphære acquirant formam quamvis optatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum superius, in eâdem illâ distantie quadratæ ratione inversâ. Q. E. D.

Corol.

Corol. 1. Hinc si ejusmodi sphære complures, sibi invicem per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibuscunque centrorum distantii, ut sphære attrahentes.

Corol. 2. Inque distantii quibuscunque inæqualibus, ut sphære attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, seu pondera sphærarum in sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantii, ut sphære attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque distantii inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata distantiarum inter centra inversè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à sphære utriusque virtute attractivâ mutuo exercitâ in sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportionem servatâ.

Corol. 6. Si hujusmodi sphære aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantie inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantie erunt proportionales diametris.

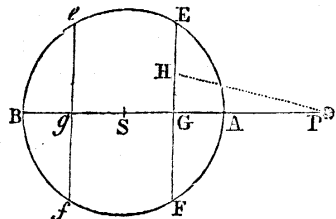
Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam sphære attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

P R O P. LXXVII. T H E O R. XXXVII.

Si ad singula sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantii punctorum à corporibus attractis: dico quòd vis composita, quâ sphære duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphærarum.

Cas. I. Sit AEBF sphæra; s centrum ejus; p corpusculum attractum, PASB axis sphære per centrum corpusculi transiens; BF, ef plana duo, quibus sphæra secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia à centro sphære; c, g inter-



sectiones planorum & axis; & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpusculum P, secundum lineam PH exercita, est ut distantia PH; & (per legum Corol. 2.) secundum lineam PG, seu versus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum om-

nium in plano EF, hoc est plani totius vis, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut distantia PG multiplicata per numerum punctorum; id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso EF & distantia illa PG. Et similiter, vis plani ef, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam pg, sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam pg; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum PG+pg, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS, hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS, vel ut summa æqualium planorum EF+ef ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in sphaera tota, hinc inde æqualiter à centro sphaeræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS, hoc est, ut sphaera tota & ut distantia PS conjunctim. Q. E. D.

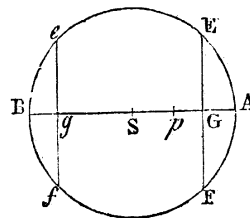
Caf. 2. Trahit jam corpusculum P sphaeram AEBF. Et eodem argumento probabitur quod vis, quâ sphaera illâ trahitur, erit ut distantia PS. Q. E. D.

Caf. 3. Componatur jam sphaera altera ex corpusculis innume-
ris P; & quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi à centro sphaeræ primæ & ut sphaera eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphaeræ; vis tota, quâ corpuscula omnia in sphaerâ secundâ trahuntur, hoc est, quâ sphaera illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphaera illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphaeræ primæ, & propterea proportionalis est distantiae inter centra sphaerarum. Q. E. D.

Caf. 4. Trahant sphaeræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. Q. E. D.

Caf.

Caf. 5. Locetur jam corpusculum P intra sphaeram AEBF; & quoniam vis plani ef in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo & distantia pg; & vis contraria plani EF ut solidum contentum sub plano illo & distantia PG; erit vis ex utraq; composita ut differentia solidorum; hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiae distantiarum, id est, ut summa illa ducta in ps distantiam corpusculi à centro sphaeræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in sphaerâ totâ, hoc est, attractio sphaeræ totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphaera tota, & ut ps, distantia corpusculi à centro sphaeræ. Q. E. D.



PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

Si sphaeræ in progressu à centro ad circumferentiam sint utcumque dissimiles & inaequabiles, in progressu verò per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similes; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujusmodi sphaeræ duæ se mutuo trahunt, sit proportionalis distantiae inter centra sphaerarum.

Demonstratur ex Propositione præcedente eodem modo, quo Propositio LXXVI. ex Propositione LXXV. demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in Propositionibus X & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphaericorum conditionis jam descriptæ, & attracta corpora sunt sphaeræ conditionis ejusdem.

Scholium.

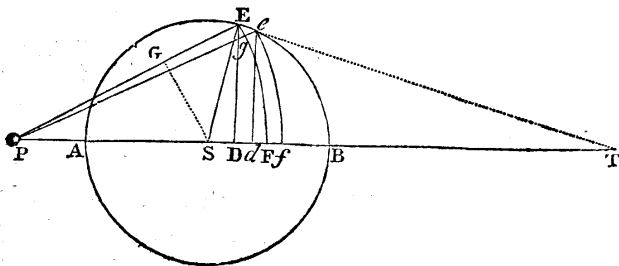
Attractionum casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, & componentes corporum sphaericorum vires centripetas eadem lege, in recessu à centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: quod est notatu

notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minùs elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum effèt. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

L E M M A XXIX.

Si describantur, centro s , circulus quilibet AEB , ☉, centro P , circuli duo EF , ef , secantes priorem in E , e , lineamque PS in F , f ; ☉ ad PS demittantur perpendiculara ED , ed : dico quòd, si distantia arcuum EF , ef in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis DD ad lineam evanescentem Ff ea sit, quæ lineæ PE ad lineam PS .

Nam si linea pe secet arcum EF in g ; & recta ee , quæ cum arcu evanescente EE coincidit, producta occurrat rectæ PS in T ; & ab s demittatur in PE normalis SG : ob similia triangula DTE , dte , DES ; erit DD ad EE , ut DT ad TE , seu DE ad ES ; & ob tri-



angula egg , ESG (per Lem. VIII. & Corol. 3. Lem. VII.) similia (c), erit EE ad eg , seu Ff , ut ES ad SG ; & ex æquo, DD ad Ff ut DE ad SG ; hoc est (ob similia triangula PDE , PGS) ut PE ad PS . Q. E. D.

P R O P.

(c). Anguli recti PEF , SEB inter se æquales sunt. Ablatoque communi SEF , relinquentur PES , sive GES , eeg inter se æquales. Anguli autem ad G et g æquales, namque recti. Quapropter triangula GES , gee erunt inter se similia.

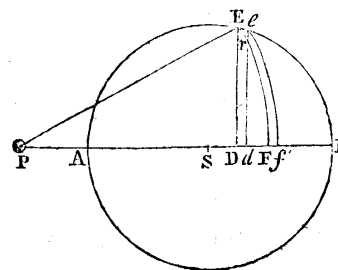
(d) Nimirum vis quæ corpusculum in P positum trahitur versus centrum s ab annulo evanescente sphærico, conversione evanescentis arcus EF genito, fluxio est virium, quibus corpus idem trahitur versus idem centrum s à superficie sphæricâ, quæ conversione arcus integri EF generatur. Ex iis autem quæ hactenus à Newtono disputata sunt, id scilicet efficitur, illam virium fluxionem rest. anguli $PD \times DD$, sive $PD \times \frac{1}{2}FD$, rationem constanter servare. Sive spatii $PF \times \frac{1}{2}FD$ — $FD \times FD$. Hujus autem spatii spatium $PF \times FD$ — $\frac{1}{2}FD^2$ fluens erit. Quare vires ipse spatii $PF \times$

P R O P. LXXIX. T H E O R. XXXIX.

LIBER
PRIMUS.

Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens $EFfe$, convolutione sui circa axem PS , describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales extendant æquales vires centripetæ: dico quòd vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in P , est in ratione compositâ ex ratione solidi $DEq \times Ff$, ☉ ratione vis, quâ particula data in loco Ff traheret idem corpusculum.

Nam si primò consideremus vim superficiæ sphæricæ EF , quæ convolutione arcus FE generatur, & à linea de ubivis secatur in r ; erit superficiæ pars annularis, convolutione arcus re genita, ut lineola dd , manente sphære radio PE (uti demonstravit Archimedes in Lib. de Sphæra & Cylindro.) Et hujus vis, secundum



lineas, PE vel pr , undique in superficie conicâ fitas, exercita, ut hæc ipsa superficiæ pars annularis; hoc est, ut lineola dd , vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphære radio PE & lineolâ illâ dd : at secundum lineam, PS , ad centrum s tendentem, minor in ratione PD ad PE , ideo-

que ut $PD \times DD$. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur dd ; & superficies FE dividetur in totidem æquales annulos; quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times DD$, hoc est, ut $\frac{1}{2}PFq$ — $\frac{1}{2}PDq$, ideoque ut DE quad(d). Ducatur jam superficies FE in altitudinem Ff ; & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq \times Ff$: puta si detur vis, quam particula aliqua data, Ff , in distantia PF exercet

FD — $\frac{1}{2}FD^2$, vel inter se rationem gerent, vel datis majores minoresve erunt, quàm ut rationem illam gerere possint. (Geometr. Flux. Th. IV.) Evanescente FD punctum D tandem cum ipso F jungatur, rectaque FD in nihilum abeat. Superficies ipsa sphærica FE , cum viribus suis simul in nihilum abierit. Non igitur datis majores minoresve erunt vires illæ, quàm ut spatii illius inter se rationem gerant, quocum unâ in nihilum abierint. Gerent igitur constanter spatii $PF \times FD$ — $\frac{1}{2}FD^2$ inter se rationem. Junctâ verò FE , dimidium quadrati ex FE rectangulo $PF \times FD$ æquale erit. Quare $PF \times FD$ — $\frac{1}{2}FD^2$ differentie quadratorum ex EF , FD dimidium erit; hoc est, dimidium quadratum ex FD . Vires igitur, quibus superficies sphærica conversione arcus EF genita corpusculum in P positum versus s trahunt, quæcunque fuerit arcus illius amplitudo, quadrati ex ED , hoc est, è sinu arcus, rationem inter se constanter gerunt, sicut Newtonus affirmavit.

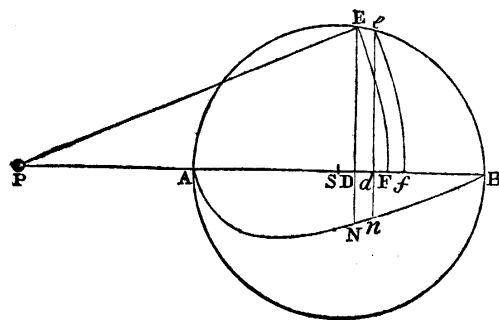
in

in corpusculum P. At si vis illa non detur, fiet vis solidi *EFfe* ut solidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. Q. E. D.

PROP. LXXX. THEOR. XL.

Si ad sphaeræ alicujus ABE, centro s descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad sphaeræ axem AB, in quo corpusculum aliquod P locatur, erigantur de punctis singulis, D, perpendiculara, DE, sphaeræ occurrentia in E, & in ipsis capiantur longitudines DN, quæ sint ut quantitates $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis, quam sphaeræ particula, sita in axe ad distantiam PE, exercet in corpusculum P, conjunctim: dico quod vis tota, quæ corpusculum P trahitur versus sphaeram, est ut area ANB comprehensa sub axe sphaeræ AB, & linea curva ANB, quam punctum N perpetuo tangit.

Etenim stantibus quæ in Lemmate & Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem sphaeræ AB dividi in particulas in-



numeras æquales *dd*, & sphaeram totam dividi in totidem laminas sphaericas concavo-convexas *EFfe*; & erigatur perpendicularum *dn*. Per Theorema superius, vis, quæ lamina *EFfe* trahit corpusculum P, est ut $DEq \times Ff$ & vis

particulæ unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctim. Est autem (per Lemma novissimum) *dd* ad *ff* ut PE ad PS, & inde *ff* æqualis $\frac{PS \times dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale *dd* in $\frac{DEq \times PS}{PE}$; & propterea vis laminæ *EFfe* est ut *dd* in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex hypothese) ut $DN \times dd$, seu area evanescens *DNnd*. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut aræ omnes *DNnd*; hoc est, sphaeræ vis tota ut area tota ANB. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiiis, & fiat DN ut $DEq \times$

$\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quæ corpusculum à sphaerâ attrahitur, ut ^{LIBER PRIMUS.} area ANB.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut distantia corpusculi à se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quæ corpusculum P à sphaerâ totâ attrahitur, ut area ANB.

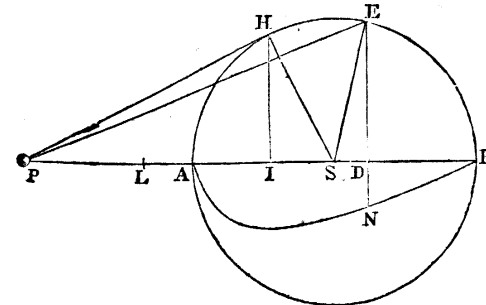
Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut cubus distantie corpusculi à se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quæ corpusculum à totâ sphaerâ attrahitur, ut area ANB.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens ponatur esse reciprocè ut quantitas v, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times v}$; erit vis, quæ corpusculum à sphaerâ totâ attrahitur, ut area ANB.

PROP. LXXXI. PROB. XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area ANB.

A puncto P ducatur recta PH sphaeram tangens in H, & ad axem PAB demissa normali HI, bisecetur PI in L; & erit (per Prop. XII. Lib. 2. Elem.) PEq æquale PSq + SEq + 2PSD. Est autem SEq seu SHq (ob similitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale est contento sub PS & PS + SI +

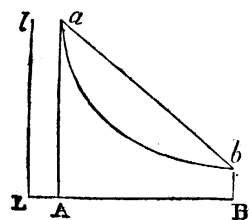


2SD, hoc est, sub PS & 2LS + 2SD, id est, sub PS & 2LD. Porro DE quad. æquale est SEq - SDq, seu SEq - LSq + 2SLD - LDq, id est, 2SLD - LDq - ALB. Nam LSq - SEq, seu LSq - SAq (per Prop. VI. Lib. 2. Elem.) æqua-

tur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq ; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times v}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN, resolvit sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times v} - \frac{LDq \times PS}{PE \times v} - \frac{ALB \times PS}{PE \times v}$: ubi si pro v scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale

tionale inter ps & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum arcæ per methodos vulgatas innotescunt. Q. E. F.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro v scribe distantiam PE ; dein $2PS \times LD$ pro PEq , & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege, ut inter movendum crescendo vel decrecendo æquetur semper longitudini LD , describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de areâ priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam ANB . Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicularia Ll, Aa, Bb , quorum Aa ipsi Ll , & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB , per puncta a, b describatur hyperbola ab . Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ ANB æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiae, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE \text{ cub.}}{2ASq}$ pro v , dein $2PS \times LD$ pro PEq ; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id

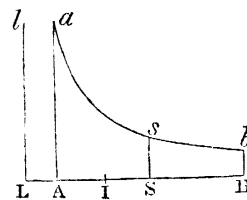
(*) Nimirum $As^2 = sh^2 = ps \times si$. Et $ps \times si = ls^2 - li^2$; nempe cum recta pi in puncto L media sit divisa. Hinc $li^2 = ls^2 - sa^2 = alB$. Quare $li = \sqrt{alB}$. Sed $2si = 2ls - 2li = lb + al - 2\sqrt{alB}$. Quare $\sqrt{2si} = \sqrt{lb} - \sqrt{al}$. Et $\frac{1}{\sqrt{2si}} \times \frac{\sqrt{lb} - \sqrt{al}}{\sqrt{alB}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2si}} \times \frac{1}{\sqrt{al}} - \frac{1}{\sqrt{lb}} \right)$

$= \frac{1}{\sqrt{alB}} = \frac{1}{li}$. Hinc areas primam secundamque illis, $\frac{2siq \times SL}{li}$, siq , singulatim æquari satis patet. Tertiæ reductio hujuscemodi erit, $\frac{si^2 \times ALB}{3\sqrt{2si}} \times \frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}} = \frac{si^2 \times ALB}{3 \cdot LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}} \times \frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{ALB^{\frac{3}{2}}} =$

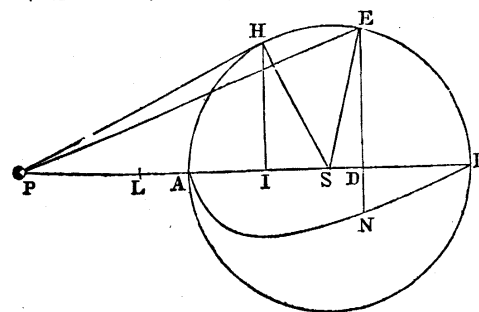
si²

id est, (ob continuè proportionales ps, as, si) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SILIBER}{2LDq}$ PRIMUS.

Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB , prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2}SI$, aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$, aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De primâ subducatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsitæ ANB . Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, s, B , erige perpendicularia Ll, Aa, ss, Bb , quorum ss ipsi si æquetur, perque punctum s , asymptotis Ll, LB , describatur hyperbola asb , occurrens perpendicularis Aa, Bb in a & b ; & rectangulum $2ASI$ subductum de area hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam ANB .



Exempl. 3. Si vis centripeta, ad singulas sphaeræ particulas tendens, decrescit in quadruplicatâ ratione distantiae à particulis; scribe $\frac{PEq}{2AS \text{ cub.}}$ pro v , dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE , & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDq}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB producant areas totidem, viz. $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in



$\frac{1}{\sqrt{LA \text{ cub.}}} - \frac{1}{\sqrt{LB \text{ cub.}}}$. Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq , & $SIq + \frac{2SI \text{ cub.}}{3LI}$ (c). Hæ verò, subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SI \text{ cub.}}{3LI}$. Proinde vis

$\frac{si^2}{3 \cdot LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}} \times \frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{ALB^{\frac{3}{2}}} = \frac{si^2}{3 \cdot LI} \times \frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}} = \frac{si^2}{3LI} \times LB + LB^{\frac{1}{2}} \times LA^{\frac{1}{2}} + LA = \frac{si^2}{3LI} \times LB + \frac{si^2}{3LI} \times LB + LI + LA$. Jam verò $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quare $\frac{si^2}{3LI} \times LB + LI + LA = \frac{si^2}{3LI} \times 2SI + 3LI$. Quare $\frac{si^2 \times ALB}{3\sqrt{2si}} \times \frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}} = \frac{si^2}{3LI} \times 2SI + 3LI = si^2 + \frac{2SI^2}{LI}$. Q. E. D. (Le Saur & Jacquier ad locum.)

G g 2

tota,

per Exempla illa & Theorema XLI. inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus orbes concavo-convexos, five corpora attracta collocentur extra orbes, five intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his sphaeris & orbibus ubivis, extra locum contactus, materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. E. D.

P R O P. LXXXVII. T H E O R. XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materia æqualiter attractivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales, & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. Q. E. D.

Corol. I. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujuscvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & distantiarum dignitates illæ inversè. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicatâ distantiarum à corpusculis attractis, corpora autem sint ut $A^{\text{cub.}}$ & $B^{\text{cub.}}$ ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantia à corporibus, ut A & B : attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A^{\text{cub.}}}{A^{\text{quad.}}}$ & $\frac{B^{\text{cub.}}}{B^{\text{quad.}}}$, id est, ut corporum latera illa cubica A & B . Si vires particularum decrescant in ratione triplicatâ distantiarum à corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A^{\text{cub.}}}{A^{\text{cub.}}}$ & $\frac{B^{\text{cub.}}}{B^{\text{cub.}}}$, id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplatâ; attractiones in corpora

pora erunt ut $\frac{A^{\text{cub.}}}{A^{\text{qq}}}$ & $\frac{B^{\text{cub.}}}{B^{\text{qq}}}$, id est, reciprocè ut latera cubica A & B . LIBER PRIMUS.

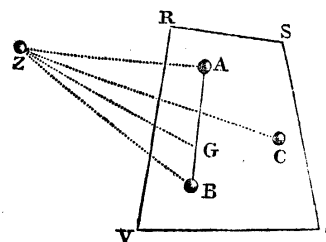
B. Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus, quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modò decrementum illud sit directè vel inversè in ratione aliquâ distantiarum.

P R O P. LXXXVIII. T H E O R. XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantia locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia consimili & æquali constantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

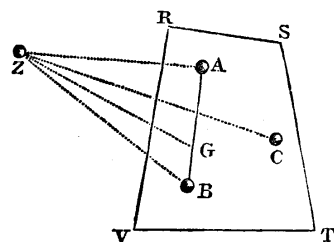
Corporis RSTV particulae A , B trahant corpusculum aliquod z viribus, quæ, si particulae æquantur inter se, sint ut distantia Az , Bz ; si particulae statuuntur inæquales, sint ut hæ particulae & ipsarum distantia Az , Bz conjunctim, five (si ita loquar) ut hæ particulae in distantias suas Az , Bz respectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times Az$ & $B \times Bz$. Jungatur AB , & secetur ea in G , ut sit AG ad BG ut particula B ad particulam A ; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B . Vis $A \times Az$ (per legem Corol. 2.) resolvitur in vires $A \times Gz$ & $A \times AG$; & vis $B \times Bz$ in vires $B \times Gz$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$



& $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG , æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times Gz$ & $B \times Gz$. Tendant hæ ab z versus centrum G , & vim $A + B \times Gz$ component; hoc est, vim eandem ac si particulae attractivæ A & B confisterent in eorum communi gravitatis centro G , globum ibi componentes.

Eodem argumento, si adjungatur particula tertia c , & componatur

ponatur hujus vis cum vi $A+B \times GZ$ tendente ad centrum G ; vis



inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G , & particulæ c ; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, c ; & eadem erit, ac si globus & particula c confisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$, ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.

Corol. Hinc motus corporis attracti z idem erit, ac si corpus attrahens $RSTV$ esset sphaericum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

P R O P. LXXXIX. T H E O R. XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantie locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

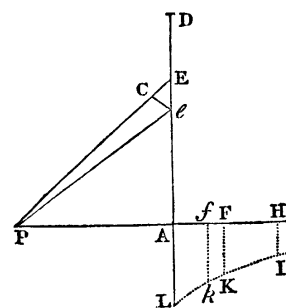
P R O P.

P R O P. XC. P R O B. XLIV.

LIBER
PRIMUS.

Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro A , intervallo quovis AD , in plano, cui recta AP perpendicularis est, describi intelligatur Circulus; & invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis, P , in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis, E ad corpusculum attractum P agatur recta PE . In rectâ



PA capiatur PF ipsi PE æqualis, & erigatur normalis FK , quæ fit ut vis quâ punctum E trahit corpusculum P . Sitque IKL curva lineâ, quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L . In PA capiatur PH æqualis PD , & erigatur perpendicularum HI Curvæ prædictæ occurrens in I ; &

erit corpusculi P attractio in Circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP . Q. E. I.

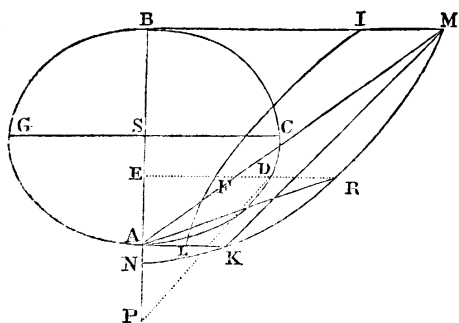
Etenim in AE capiatur linea quàm minima ee . Jungatur pe , & in pe , PA capiantur pc , pf ipsi pe æquales. Et quoniam vis, quâ anuli, centro A intervallo AE in plano prædicto descripti, punctum quodvis E trahit ad se corpus P , ponitur esse ut FK ; & inde vis, quâ punctum illud trahit corpus P versus A , est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, quâ annulus totus trahit corpus P versus A , ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine ee , & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE , ee & ce) æquatur rectangulo $PE \times ce$ seu $PE \times pf$; erit vis, quâ annulus iste trahit corpus P versus A , ut $PE \times pf$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; id est, ut contentum $pf \times FK \times AP$, five ut area $FKkf$ ducta in AP . Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD describitur,

H h 2

scribitur,

DE MOTU
CORPORUM

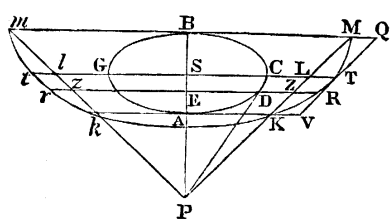
AB - PE + PD. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD.$



ista sphæroidem fecat (c). A sphæroidis verticibus A, B ad ejus
axem

(c) L O C U S ' S O L I D U S.

Sectione conicâ ACB, cujus centrum s, axes AB, CG, positione datâ, si in recta ED ordinatim ad axem alterutrum educâ capiatur ER, quæ æqualis sit rectæ PD, quæ terminum ordinatæ cum puncto P, in axe BA dato, jungat; punctum R erit ad aliam aliquam sectionem conicam positione datam.



Quadratis ex PE, ED simul sumptis; hoc est, propter PE, EZ inter se æquales, duobus quadratis, ex EZ, ED simul sumptis. Cùm verò recta xz media sit divisa in puncto F, quadratum ex ER æquale est quadrato ex EZ cum rectangulo zR x RZ. (Elem. II. 6.) Quadratum igitur ex EZ cum rectangulo zR x RZ, quadratis ex EZ, ED simul sumptis æquale est. Quadratoque ex EZ communiter dempto, manebit rectangulum zR x RZ quadrato ex ED æquale. At verò quadratum ex ED ad rectangulum AE x EB, propter sectionem conicam ACB positione datam, datam rationem habet. Quare et rectangulum zR x RZ ad rectangulum AE x EB rationem datam habet. Rectangulum autem AE x EB ad rectangulum kZ x ZM rationem habet datam; nimirum eam, quam quadratum ex datâ PA ad quadratum ex datâ PK; (El. VI. 20.) nempe cùm sit tam AE ad kZ quàm EB ad ZM ut PA ad PK. Rectanguli igitur zR x RZ ad rectangulum kZ x ZM, five RV x RQ, ratio data est (8. dat.) A puncto igitur R in rectas quatuor, kM, kN, kK, mN, positæ ne datas, deducuntur quatuor, RZ, RZ, RV, RQ, datis inclinationibus. Quodque dediturum duæ, RZ, RZ, rectangulum claudunt, ad rectangulum, alteris duabus deducturum conclusum, datam rationem habet. Erit igitur punctum x ad sectionem conicam positione datam. Q. E. D.

COMPOSITIO LOCI SOLIDI.

COMPOSITIO LOCI SOLIDI.
 Ductis per A, B, rectis AK, BM cum axe sc parallelis, fiant AK, AK rectæ PA singulatim æquales.
 Junctæ PK, PK, rectæ BM in punctis M, m occurrant. Jungatur PC, & in axe sc producto capiat
 tur

Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit, quâ Sphaerois AGBC attrahit corpus quodvis P, exterius in axe suo AB situm. Sit NCRM sectio conica, cujus ordinatim applicata ER, ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata lis verticibus A, B ad ejus axem

axem AB erigantur perpendiculara AK, BM, ipsis AP, BP æqualia re-
spectivè, & propterea sectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eâdem segmentum KMRK. Sit autem
sphæroidis centrum s, & semidiameter maxima sc: & vis, quâ
Sphæroidis trahit corpus P, erit ad vim, quâ sphæra diametro AB
descripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS \text{ cub.}}{3PS \text{ quad.}}$ (f).
Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmento-
rum sphæroidis.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collocetur; attractio erit ut ipsius distantia à centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, siue particula in axe sit, siue in aliâ quâvis diametro datâ. Sit AGOF (*vide fig. p. 250*) sphæroidis attrahens, s centrum ejus, & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG sphæroidi hinc inde

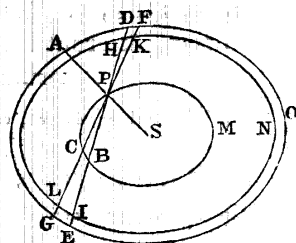
tur ST junctæ PC æqualis. Per puncta quinque, κ , τ , m , m , k , scribatur sectio conica. Ea Loc-
cus erit punctorum R . Hoc est, si recta ED , quæ ad axem AB Curvæ ACB ordinatim esteducta,
sectionæ conicæ $\kappa\tau m m k$ in puncto R occurrat, recta ER junctæ PD æqualis erit.

DEMONSTRATIO COMPOSITIONIS.

Sectionis conicæ ACB axis gc rectis PM, PM in punctis L, I occurrat. Propter sectionem conicam KTMmk, rectangulum RZXRz, erit ad RVXRQ, five ZKxZM, sicut TLxTl ad quadratum ex LM. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. LVI. Cor.) Rectangulum autem RZXRz ad rectangulum AE x EB rationem habet, quæ compositur è rationibus rectanguli RZXRz ad ZKxZM, rectangulique ZKxZM ad AE x EB; five è rationibus rectanguli TLxTl ad quadratum ex LM, quadratque ex LM ad quadratum ex SB. Ex eisdem vero compositur ratio illa, quam TLxTl habet ad quadratum ex SB. Quare RZXRz erit ad AE x EB ut TLxTl ad quadratum ex SB. At verò rectangulum TLxTl quadrato ex sc æquale est. Nam, propter æquales st, pc, quadratum ex st duobus quadratis ex ps, sc simul sumptis est æquale; five duobus ex sl, sc simul sumptis. Et cum recta l media sit divisa in puncto s, quadratum ex st, quadrato ex sl cum rectangulo TLxTl est æquale. (El. II. 6.) Quadratum igitur ex sl cum rectangulo TLxTl quadratis duobus ex sl, sc simul sumptis est æquale. Quadratoque ex sl communiter ablato, manet rectangulum TLxTl quadrato ex sc æquale. Rectangulum igitur TLxTl quadratumque ex sc ad quadratum ex sb eandem utrumque rationem habent. Sed offensum est rectangulum RZXRz ad AE x EB rationem habere eam, quam TLxTl ad quadratum ex sb; hoc est, (propter sectionem conicam ACB) sicut quadratum ex DE ad rectangulum AEB. Rectangulum igitur RZXRz et quadratum ex DE, cum ad rectangulum AE x EB eandem rationem gerant, erunt inter se æqualia. (El. v. 9.) Quadratoque ex ez communiter addito, rectangulum RZXRz cum quadrato ex ez, hoc est quadratum ex ER, quadratis ex ED, ez, simul sumptis æquale erit. Quare cum ez, ER sint inter se æquales, quadratum ex ER quadratis ex ED, ER simul sumptis, hoc est quadrato ex ED, æquale erit. Quare recta ER æqualis erit rectæ PD. Q. E. D.

Hæc velim Lector conferas cum iis, quibus alii offendere conati sunt, quod à Newtono affirmatum est, lineam KRM , five locum puncti R , Curvam esse è conicis. Senties, ni fallor, quantum lucis, si Diis placeat, quantum compendit, cum calculis istis suis Algebra rationibus Geometricis attulerit.

(4) CAPIATUR ENIM EF quæ sit ut vis, quæ circulus, cujus centrum E, radius ED, trahit corpusculum in P positum. Sitque LFI Curva, quam punctum F perpetuo tangit, quæ planis AK, BK, sphaeroidem in verticibus axis sui contingentibus, in punctis L, I occurrat. Erit igitur $EE = I -$



tarum partes hinc inde interceptæ DP & BE, PF & CG, DH & IE, FK & LG sibi mutuò æquales; propterea quòd rectæ DE, PB, & HI bifecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC, & KL. Concipe jam DPF, EPG designare conos oppositos, angulis verticalibus DPF, EPG infinitè parvis descriptos, & lineas etiam DH, EI infinitè parvas esse; & conorum particulae sphæroidum superficiebus abscissæ DHKF, GLIE, ob æqualitatem linearum DH, EI, erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum à corpufculo P, & propterea corpufculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus sphæroidum innumerarum, similium, concentricarum, & axem communem habentium, dividantur spatia DPF, EGCB in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires coni DPF & segmenti conici EGCB, & per contrarietatem se mutuò destruant. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam PCBM. Trahitur igitur corpus P à solâ sphæroide intimâ PCBM, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus A trahitur à sphæroide totâ AGOD, ut distantia PS ad distantiam AS. Q. E. D.

PROP. XCII. PROB. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est Sphæra, vel Cylindrus, aliave figura

Rectaque $\frac{cs^2 \times AS - PS \times KRM}{PS^2 + cs^2 - AS^2}$, cujus rationem area LABI servat, ea fiet $\frac{AS^3 - PS \times KRM}{PS^3}$. Jam verò existente ACBG Circulo, sectio conica NCRM Parabola erit, cujus axis NB, parameter 2PS. Id quod ex æquatione illâ, PD^2 , five $ER^2 = c^2 + 2c + 2ax + \frac{b-a}{b} x^2$ satis patet: quæ rectis, b, a, propter circulum ACBG jam factis æqualibus, in hanc migraverit, $ER^2 = c^2 + 2c + 2bx$. Hinc area conica KRMBA = NRMB - NKA = $\frac{2}{3} NB \times BM - \frac{2}{3} NA \times AK$. Sed NB = $\frac{BM^2}{2PS}$. Et NA = $\frac{AK^2}{2PS}$ (propter parabolam). Hinc $\frac{2}{3} NB \times BM - \frac{2}{3} NA \times AK = \frac{BM^3 - AK^3}{3PS}$. Quare area parabolica KRMBA = $\frac{BM^3 - AK^3}{3PS}$.

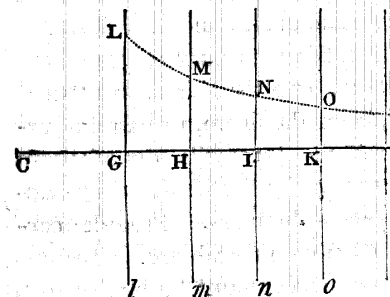
Sed

gura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi ^{LIBER PRIMUS.} congruens (per Prop. LXXX, LXXXI & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

Si Solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu à Solido decrescant in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadratice, & vi Solidi totius corpufculum ad utramvis plani partem constitutum trabatur: dico quòd Solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpufculi à plano, & index ternario minor quàm index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit LGI planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus versus I, inque plana innumera mhm, nin, oko, &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primò collocetur corpus attractum c extra solidum. Agatur autem CGHI planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non

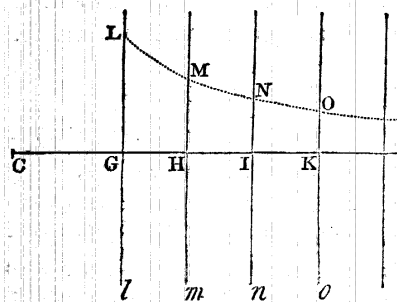


Sed BM = PB = PS + SA. Et AK = PA = PS - SA. Quare $BM^3 - AK^3 = 6PS^2 \times SA + 2SA^3$. Quare area parabolica KRMBA = $\frac{6PS^2 \times SA + 2SA^3}{3PS}$. Dempstque trapezio KARM = $AS \times BM + AK$ = $AS \times 2PS = \frac{6PS^2 \times SA}{3PS}$, manebit KRM = $\frac{2SA^3}{3PS}$. Unde et $PS \times KRM = \frac{2SA^3}{3}$. Hinc $\frac{AS^3 - PS \times KRM}{PS^3} = \frac{AS^3}{PS^3} - \frac{2SA^3}{3PS^3} = \frac{AS^3}{3PS^3}$. Atque huic rectæ æqualis erit illa, cujus rationem area LABI servat; quando scilicet sphærois ACBG, diametro æquatoris co cum ipso axe AB æquatâ, perfectam sphære figuram induerit. Erit igitur vis, quâ sphærois trahit corpus P, ad vim quâ sphæra, diametro AB scripta, idem corpus trahit, ut $\frac{AS \times cs^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + cs^2 - AS^2}$ ad $\frac{AS^3}{3PS^3}$, sicut Newtonus affirmavit. Q. E. D.

Ii 2

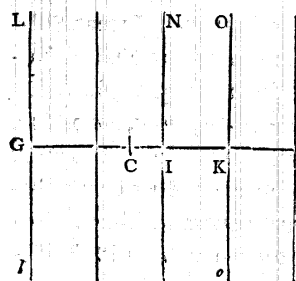
minor.

minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. xc.) vis, quâ planum quodvis *mhm* trahit punctum *c*, est reciprocè ut ch^{n-2} . In plano *mhm* capiatur longitudo *hm* ipsi ch^{n-2} reciprocè proportionalis,



& erit vis illa ut *hm*. Similiter in planis singulis *lgl*, *mik*, *oko*, &c. capiuntur longitudo *gl*, *in*, *ko*, &c. ipsis cg^{n-2} , ci^{n-2} , ck^{n-2} , &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudo capta, ideoque summa virium ut summa longitudinum; hoc est, vis

Solidi totius ut area *glok* in infinitum versus *ok* producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciprocè ut cg^{n-3} , & propterea vis Solidi totius est reciprocè ut cg^{n-3} . Q.E.D.



Caf. 2. Collocetur jam corpusculum *c* ex parte plani *lgl* intra Solidum, & capiatur distantia *ck* æqualis distantiae *cg*. Et solidi pars *lgoko*, planis parallelis *lgl*, *oko* terminata, corpusculum *c*, in medio situm, nullam in partem trahet; contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde cor-

pusculum *c* solâ vi Solidi ultra planum *ok* fiti trahitur. Hæc autem vis (per casum primum) est reciprocè ut ck^{n-3} , hoc est (ob æquales *cg*, *ck*) reciprocè ut cg^{n-3} . Q.E.D.

Corol. 1. Hinc si Solidum *lgin* planis duobus infinitis parallelis *lg*, *in* utrinque terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractivâ Solidi totius infiniti *lgko* vim attractivam partis ulterioris *niko*, in infinitum versus *ko* productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius penè est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris, augendo distantiam, decrescet quàm proximè in ratione potestatis cg^{n-3} .

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum, & ex una parte planum,

num, trahat corpusculum è regione medii illius plani; & distantia inter corpusculum & planum, collata cum dimensionibus corporis attrahentis, perexigua sit; constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum: vis attractiva corporis totius decrescet quamproximè in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & index ternario minor quàm index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quòd, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinitè major quàm attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quærat motus corporis: solvetur Problema quærendo (per Prop. xxxix.) motum corporis rectâ descendens ad hoc planum, & (per legem Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, secundum lineas eidem plano parallelas factæ. Et contrâ, si quærat lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ moveatur, solvetur Problema operando ad exemplum Problematis Tertii.

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in series convergentes. Ut si ad basem *A* in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo *B*, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quærat vis quâ corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ vel in basem attractum, vel à basi fugatum, moveri possit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit: suppono basem augeri parte quàm minimâ *o*, & ordinatim applicatam, $A + o$, resolvo in seriem infinitam, $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} o \cdot A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m(m-n)}{2nn} oo \cdot A^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo *o* duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{m(m-n)}{2nn} oo \cdot A^{\frac{m-2n}{n}}$

vim.

diculum LO, æquales erunt MO, OR; & additis æqualibus ON, OI, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cum IR detur, datur etiam MN; estque rectangulum NMI ad rectangulum sub latere recto & IM, hoc est, ad HM, in datâ ratione. Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ, id est, differentiæ quadratorum ML, & PL, seu LI; & HM, datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem ML; ergo datur ratio ML - LI ad ML; & convertendo ratio LI ad ML, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ LMR ad finem anguli emergentiæ LIR. Q. E. D.

Caf. 2. Transeat jam corpus successivè per spatia plura parallelis planis terminata, Aabb, Bbcc, &c. & agitur vi, quæ sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum Aa erit ad finem emergentiæ ex plano secundo Bb, in datâ ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum Bb, erit ad finem emergentiæ ex plano tertio cc, in datâ ratione; & hic sinus ad finem emergentiæ ex plano quarto dd, in datâ ratione; & sic in infinitum: & ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad finem emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Miruantur jam planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur; & ratio sinus incidentiæ in planum primum ad finem emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. Q. E. D.

P R O P.

P R O P. XCV. T H E O R. XLIX.

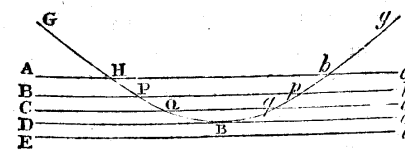
Iisdem positis; dico quòd velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad finem incidentiæ.

Capiantur AH, id æquales, & erigantur perpendiculara AG, dk, occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK, in G & K. In GH capiatur TH æqualis IK, & ad planum Aa demittatur normaliter tv. Et (per legem Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum planis Aa, Bb, cc, &c. perpendiculararem, alterum iisdem parallelum. Vis attractio- nis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas; & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam AG & punctum H, interque punctum I & lineam dk; hoc est, æqualibus temporibus describet lineas GH, IK. Proinde velocitas ante incidentiam est : d velocitatem post emergentiam, ut GH ad IK vel TH, id est, ut AH vel Id ad vH, hoc est (respectu radii TH vel IK) ut sinus emergentiæ ad finem incidentiæ. Q. E. D.

P R O P. XCVI. T H E O R. L.

Iisdem positis, & quòd motus ante incidentiam velocior sit quàm postea: dico quòd corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana Aa, Bb, cc, &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi HP, PQ, QR, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ, GH, obliquitas ad planum primum Aa,



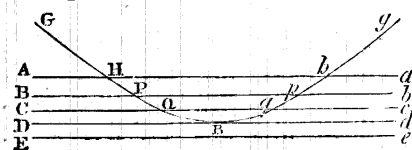
VOL. II.

K k

ut

DE MOTU
CORPORUM

ut finus incidentiæ fit ad radium circuli, cujus est finus, in eâ ratione, quam habet idem finus incidentiæ ad finum emergentiæ ex plano dd , in spatium $ddex$: & ob finum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano dd . Perveniat corpus ad hoc

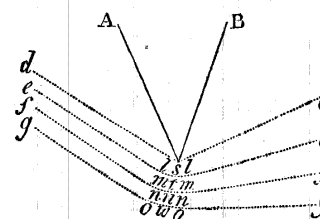


planum in puncto B; & quoniam linea emergentiæ coincidet cum eodem plano, perspicuum est, quod corpus non potest ultra pergere versus planum ee . Sed nec potest idem pergere in lineâ emergentiæ rd , propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana cc , dd , describendo arcum Parabolæ qBq , cujus vertex principalis (juxta demonstrata Galilei) est in B; secabit planum cc in eodem angulo in q , ac prius in Q; dein pergendo in arcubus parabolicis qp , pb , &c. arcubus prioribus qp , ph similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in p , b , &c. ac prius in P, H, &c. emergetque tandem eadem obliquitate in b , quâ incidit in H. Concipe jam planorum aa , bb , cd , dd , ee , &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eò ut actio attractionis vel impulsus, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

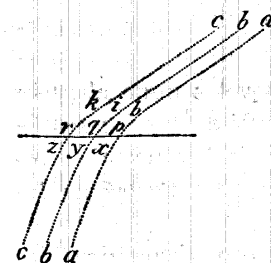
Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namque lucem successive propagari, & spatio quasi septem vel octo minorum primorum à sole ad terram venire, jam constat per phænomena satellitum *Jovis*, observationibus diversorum astronomorum confirmata. Radii autem in aëre existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosam cubiculum admissa, invenit, & ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & aëre

aëre cuforum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radii, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora, incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias minus incurvantur; & ad distantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum fascias efformant. In figurâ designat s aciem cultri vel cunei cu-



jusvis ASB; & *gowog*, *fnunf*, *entme*, *dlsl* sunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum à cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aëre extra cultrum, debent etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aëre quàm cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refraçtio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam



incurvationem radiorum, factam partim in aëre antequam attingunt vitrum, partim (ui fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzc*, *blyb*, *abxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *b* & *x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de naturâ radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectoryas corporum trajectoryis radiorum perfimiles solummodo determinans.

P R O P. XCVII. P R O B. XLVII.

Posito quod finus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad finum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum

K k 2

considerari

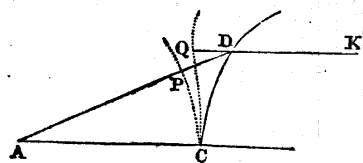
considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus à quo corpuscula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta describat superficiem quæsitam; D, E Curvæ illius puncta duæ quævis; & EF, EG perpendiculara in corporis vias AD, DB demissa. Accedat punctum D ad punctum E; & lineæ DF, quæ AD augeatur, ad lineam DG, quæ DB diminuitur, ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ (b). Datur ergo ratio incrementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB; & propterea, si in axe AB

sumatur ubivis punctum c, per quod Curva CDE transire debet, & capiatur ipsius AC incrementum, CM, ad ipsius BC decrementum, CN, in datâ illâ ratione, centrisque A, B, & intervallis AM, BN describantur circuli duo se mutuo secantes in D; punctum illud D tanget Curvam quæsitam CDE, eademque ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti c, habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Cartesius* in *Opticâ* & *Geometriâ* ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* celaverit, visum fuit hâc Propositione exponere.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis CD, secundum lineam rectam AD, lege quavis ductam incidens, emerget secundum aliam quamvis rectam DK, & à puncto c duci intelligantur lineæ curvæ CP, CQ ipsis AD, DK semper perpendicularares: erunt incrementa linearum PD, QD, atque ideo lineæ ipsæ PD, QD, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contrâ.



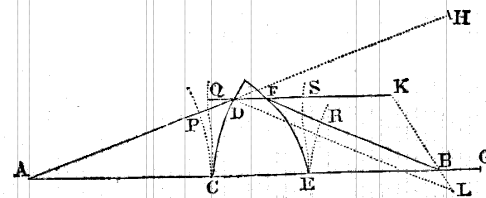
P R O P.

(b) Junctâ enim DE, anguli rectilinei DEF, DEG, quorum sinus sunt DF, DG pro radio communi

P R O P. XCVIII. P R O B. XLVIII.

Isdem positis, & circa axem AB descriptâ superficie quâcunque attractivâ CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Junctâ AB fecet superficiem primam in c & secundam in e, puncto D utcumque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficie secundâ ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: productum AB ad G,



ut sit BG ad CE ut M—N ad N; tum AD ad H, ut sit AH æqualis AG; tum etiam DF ad K, ut sit DK ad DH ut N ad M. Junge KB, & centro D intervallo DH describe circulum occurrentem KB productæ in L, ipsique DL parallelam age BF: & punctum F tanget lineam EF, quæ circa axem AB revoluta describet superficiem quæsitam. Q. E. F.

Nam concipe lineas CP, CQ ipsis AD, DK respectivè, & lineas ER, ES ipsis FB, FD ubique perpendicularares esse, ideoque QS ipsi CE semper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) PD ad QD ut M ad N, ideoque ut DL ad DK vel FB ad FK; & divisim ut DL—FB, seu PH—PD—FB, ad FD, seu FQ—QD; & compositè ut PH—FB ad FQ, id est (ob æquales PH & CG, QS & CE) CE+BG—FR ad CE—FS. Verum (ob proportionales BG ad CE & M—N ad N) est etiam CE+BG ad CE ut M ad N; ideoque divisim FR ad FS ut M ad N; & propterea (per Corol. 2. Prop. XCVII.) superficies EF cogit corpus, in ipsam secundum lineam DF incidens, pergere in lineâ FR ad locum B. Q. E. D.

Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures.

muni DE, hi, evanescente arcu DE, fiunt angulis, ille incidentis radii, hic emergentis, ultimò æquales. Erunt igitur DF, DG ultimò ut sinus illi.

Ad

Ad usus autem opticos maximè accommodatæ sunt figuræ sphaericæ. Si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphaericè figuratis & aquam inter se cludentibus conflentur; fieri potest ut à refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accuratè corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda sunt, non solum quòd facilius & accuratius formari possint, sed etiam quòd penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Veruntamen diversa diversorum radiorum refringibilitas impedimento est, quo minus optica per figuras vel sphaericas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperitè collocabitur.

D E

D E

MOTU CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

PROP. I. THEOR. I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentiâ amissus est ut spatium movendo confectum.

NAM cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc est, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in spatiis liberis solâ vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

L E M M A.

L E M M A I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.

Sit A ad A-B ut B ad B-C & C ad C-D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. Q. E. D.

P R O P. II. T H E O R. II.

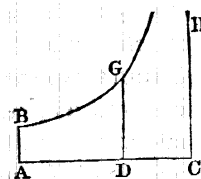
Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium simile moveatur, sumantur autem tempora aequalia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressionem geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis, singulis temporis particulis, ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. 2.) continuè proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressionem continuâ, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eadem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressionem geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulae, & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continuè proportionales, erunt in hoc etiam casu continuè proportionales. Q. E. D.

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (per Prop. I. Lib. 2.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

I

Corol.

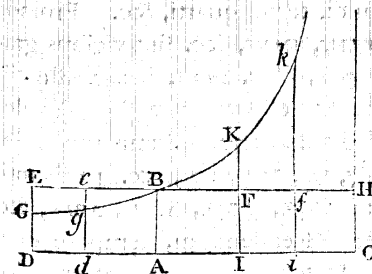


Carol. Hinc si asymptotis rectangulis AC, CH describatur hyperbola BG, sintque AB, DG ad asymptoton AC perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motû initio, per lineam quamvis datam AC, elapsi autem tempore aliquo per lineam indefinitam DC: exponi potest tempus per aream ABGD, & spatium eo tempore descriptum per lineam AD. Nam si area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta DC in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & partes rectæ AC, æqualibus temporibus descriptæ, decrescent in eadem ratione.

P R O P. III. P R O B. I.

Corporis, cui, dum in medio simili rectâ ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum BACH, & resistentia medii, initio ascensûs, per rectangulum BADE sumptum ad contrarias partes rectæ AB. Asymp-



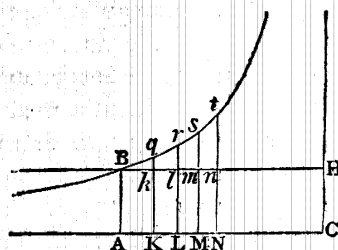
totis rectangulis AC, CH, per punctum B describatur hyperbola secans perpendicula DE, de in G, g; & corpus ascendendo tempore DGGd describet spatium EGge, tempore DGBA spatium ascensûs totius EGB; tempore ABKI spatium descensûs BFK, atque tempore IKki spatium descensûs Kfkk; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt ABED, ABEd, nulla, ABFI, ABfi respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit BACH.

Resolvatur enim rectangulum BACH in rectangula innumera ak, kl, lm, mn, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, ak, al, am, an, &c.

VOL. II.

L 1

&c.



&c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK, vel ABHC ad ABKk, ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi; deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt ABHC, KkHC, LhHC, MmHC, &c. ut vires absolutæ, quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per motus legem I I.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn, &c. & propterea (per Lem. I. Lib. I I.) in progressionem geometricam. Quare si rectæ Kk, Ll, Mm, Nn, &c. productæ occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ ABqK, KqrL, Lrsm, MstN, &c. æquales; ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area ABqK (per Corol. 3. Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}Kq$ seu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ qKlR, rLmS, sMnT, &c. sunt ad areæ qklr, rlms, smnt, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales BAKq, qKlR, rLmS, sMnT, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ Bkq, qklr, rlms, smnt, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per hypothesin) velocitatibus, atque ideo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt areæ Bkq, Blr, Bms, Bnt, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ ABqK, ABRL, ABMS, ABIN, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis ABRL, describit spatium Blr, & tempore LrIN spatium rlnl. Q. E. D. Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. Q. E. D.

Corol. I. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere,

(*) Nimirum sunt Bkq, qklr, rlms, smnt spatia, quæ temporum differentiis æqualibus, BAKq, qKlR, rLmS, sMnT, casu corporis conficiuntur. Horum verò spatiorum differentiæ rectangulorum Ak, Kl, Lm, Mn differentiis sunt æquales. (Nempe propter areas Aq, Kr, Lt, Mt inter se æquales.) Rectangula autem illa, cum sint rectangulorum Bk, ck, cl, cm, cn, geometrica ratione decreverint, differentiæ, eadem ratione geometrica ipsa decreverint; hoc est eâ, quâ decreverint differentiæ, quibus velocitates corporis cadentis absunt à velocitate maximâ, quam ultimò illud adeptum fuerit. Nam

acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut LIBER SECUNDUS.
vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim resistentiæ, quâ in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressionem arithmeticam, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis, in ascensu; atque etiam earundem differentia, in ascensu, decrescit in progressionem geometricam.

Corol. 3. Sed & differentiæ spatiorum^(a), quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressionem geometricam.

Corol. 4. Spatium vero à corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

PROP. IV. PROB. II.

Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

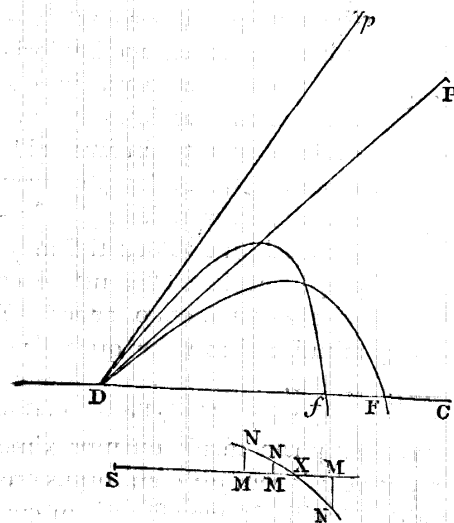
E loco quovis D egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam DP, & per longitudinem DP exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto P ad lineam horizontalem DC demittatur perpendiculum PC; & secetur DC in A, ut sit DA ac ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub DA & DP ad rectangulum sub AC & CP ut resistentia tota, sub initio motus, ad vim gravitatis. Asymptotis DC, CP describatur hyperbola quævis GTBS secans perpendicularia DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum DGKC, cujus latus GK secet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB, quâ DC sit ad CP; & ad rectæ

Nam rectangula CB, ck, cl, cm, cn pari ratione cum differentiis velocitatum illarum minuuntur. Cum verò rectangula Ak, Kl, Lm, Mn geometricè decreverint, eorum etiam differentiæ, sive differentiæ spatiorum Bkq, qklr, rlms, smnt, similiter decreverint; hoc est pro ratione differentiarum, quibus velocitates corporis cadentis à maximâ velocitate absunt.

Simili modo ostendatur differentia spatiorum, quæ æqualibus temporum differentiis, corpus ascendendo confecerit, pro ratione summæ velocitatis corporis ascendentis velocitatique maximæ, quæcum ascensum inchoaverat, decreverere.

DE MOTU
CORPORUM

longitudines DF, df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendicularum MN. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad al-



Drat quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.

Scholium.

Cæterum, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, hypothesis est magis mathematica quàm naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, resistentiæ corporum sunt in duplicatâ ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem mediis quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem

sunt *tres* æqualia. Trium verò $xx'v'$, $xx'x'$, xx' , illud $xx'v'$, è naturæ curvæ *DAF* spatii
vo' est æquale. Quare duo reliqua $xx'x'$, xx' simul sumpta spatii *EGE* sunt æqualia. Quare
 $xx'v'$ illud ipsum est quo spatium *EGE* spatium xx' exsuperat. At verò puncto v' in ipsa *F*
translato, rectangulum $xx'x'$ cum ipsâ rectâ xx' in nihilum abierit. Unde spatia *EGE*, xx'
 æqualia

quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (per motus Leg. 2 & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriuntur motus ex hac lege resistentiæ.

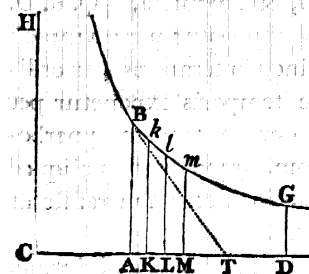
S E C T I O I I .

De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROP. V. THEOR. III.

*Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem sold vi
insitâ per medium simile movetur; tempora verò sumantur in
progressione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente:
dico, quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem
progressione geometricâ inverse; & quod spatia sunt æqualia,
quæ singulis temporibus describuntur.*

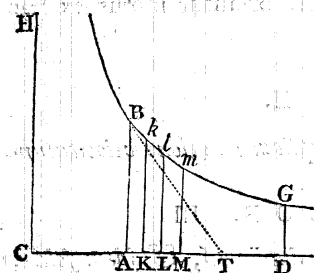
Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia
medii, & resistentiae proportionale est decrementum velocitatis;



æqualia fient. Definietur igitur punctum F ducendo SM , cum asymptotâ CP parallelam, quæ abscindat aream SMB datæ EEG æqualem. Q. E. D.

(2) NIMIRUM si Hyperbola BG motu rectæ AB, cum asymptotâ CH parallelâ, super a' teliâ asymptotâ

drata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiarum, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut areae, his lineis descriptae, sint in progressionem confimili cum spatiis quae velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio secundi KL per lineam kL, & longitudo primo tempore descripta per aream AKAB; velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas sub-



sequentes lL , mm , &c. & longitudes descriptae per areas Ll , Mm , &c. Et compositè, si tempus totum exponatur per summam partium suarum AM, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum AMMB (b). Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut sint CA, CK, CL, CM, &c. in progressionem geometricam; & erunt partes illae in eadem progressionem, & velocitates AB, kL, Ll, mm, &c. in progressionem eadem inversam, atque spatia descripta Ak, kL, Ll, &c. aequalia. Q. E. D.

Corol. 1. Patet ergo quod, si tempus exponatur per asymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatam applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & spatium totum descriptum per aream hyperbolicam adjacentem ABGD; necnon spatium, quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate primâ AB, in medio non resistente describere posset, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendū illud ad spatium quod velocitate uniformi AB in medio non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica ABGD ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol.

totâ incidentis scribatur, fluxiones incidentium AB duplicatam ipsarum AB rationem inter se constanter servavit.

Propter datam enim rectanguli $CA \times AB$ magnitudinem fluxio ejus nulla erit. Rectangula igitur $CA \times AB$, $CA \times AB$, quorum utique differentia, siquidem ulla esset, fluxio esset rectanguli $CA \times AB$, hæc inquam rectangula inter se aequalia erunt; ne fluat rectangulum $CA \times AB$, quod è naturâ hyperbolæ manet. Erit igitur AB ad CA ut AB ad CA . Hoc est, fluxio rectæ AB erit ad fluxionem abscissæ AC, ut AB ad CA. Ponatur AB motu uniformi ferri. Itaque constans erit fluxio abscissæ AC.

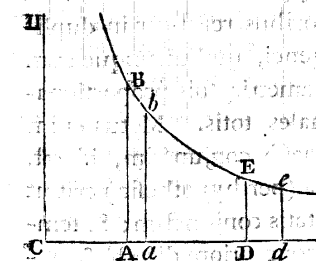
Corol. 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore AC, in medio non resistente, generare posset velocitatem AB. Nam si ducatur BT quæ tangat hyperbolam in B, & occurrat asymptoto in T; recta AT æqualis erit ipsi AC (c), & tempus exponet, quo resistentia primâ uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam AB.

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et vice versâ, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus AC, quo vis centripeta, resistentiæ æqualis, generare possit velocitatem quamvis AB; & inde datur punctum B per quod hyperbola, asymptotis CH, CD, describi debet; ut & spatium ABGD, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illâ AB, tempore quovis AD, in medio similari resistente describere potest.

PROP. VI. THEOR. IV.

Corpora spherica homogenea & aequalia, resistentis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus, quæ sunt reciproci ut velocitates sub initio, describunt semper aequalia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



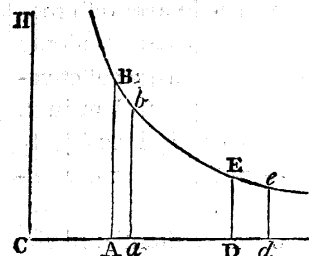
Asymptotis rectangulis CD, CH descriptâ hyperbolâ quavis, Bore, secante perpendiculari AB, ab, DE, de, in B, b, E, e, exponantur velocitates initiales per perpendiculari AB, DE, & tempora per lineas AA, dd. Est ergo ut AA ad dd ita (per hypothesin) DE ad AB, & ita (ex naturâ hyperbolæ) CA ad CD;

ac, eritque fluxio incidentis AB ad rectam datam ut AB ad CA, sive ut quadratum ex AB ad rectangulum datum $AB \times CA$. Pari ratione eadem data recta erit ad fluxionem rectæ mm, ut $AB \times CA$ ad quadratum ex mm. Ex æquo $AB : mm = AB^2 : mm^2$. Q. E. D.

Velocitates igitur, quarum fluxiones duplicatam ipsarum rationem inter se constanter servant, lineis AB, kL, Ll, mm, quibus similis est decrescendi lex, hæud incommode representari poterunt.

(b) Vide Lib. I. Sect. I. Lemma x. Not. 2.

(c) Patet per Prop. xxxvi. Lib. I. Conicorum Hamiltoni.

DE MOTU
CORPORUM

& componendo, ita ca ad cd . Ergo areæ $ABba$, $DEed$, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ AB , DE sunt ultimis ab , de ; & propterea, dividendo, partibus etiam suis amissis, $AB-ab$, $DE-de$, proportionales. Q. E. D.

P R O P. VII. T H E O R. V.

Corpora spherica quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ sunt ut motus primi directè & resistentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia descripta temporibus istis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debet resistentia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & resistentia inversè. Quare temporum particulis in eâ ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, ideoque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas & massa conjunctim, id est, ut velocitas & cubus diametri; resistentia (per hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propositionem) est in ratione priore directè & ratione posteriore inversè, id est, ut diameter directè & velocitas inversè; ideoque spatium, tempori & velocitati proportionale, est ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquuplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus

locitatibus moti, describendo spatia in sesquuplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis. LIBER
SECUNDUS.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujusque diametrorum: spatia, quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunt diametri D & E ; & si resistentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n & E^n : spatia, quibus globi quibuscunque cum velocitatibus moti amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n} . Et propterea globi homogenei describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub initio.

Corol. 4. Quod si globi non sint homogenei, spatium à globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc propositionem) augetur in ratione motus directè, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et si globi moveantur in mediis diversis; spatium in medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, & spatium in ratione temporis.

L E M M A II.

Momentum Genitæ æquatur momentis Laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque in Arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, sine additione & subtractione generatur. Ejusmodi quantitates sunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & similes. Has quantitates, ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; & earum incrementa vel

vel decrements momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis additiis, seu affirmativis, ac decrements pro subductiis, seu negativis, habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Lateris autem cujusque generantis coëfficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescientium A, B, C , &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c , &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli, AB , fuerit $ab + ba$; & geniti contenti ABC momentum fuerit $abc + bac + cab$: & genitarum dignitatum $A^2, A^3, A^4, A^5, A^6, A^7, A^8, A^{-1}, A^{-2}$, & A^{-3} momenta $2aA, 3aA^2, 4aA^3, \frac{1}{2}aA^{-1}, \frac{3}{2}aA^{-2}, \frac{1}{3}aA^{-3}, -\frac{2}{3}aA^{-4}, -2aA^{-5}, -\frac{1}{2}aA^{-6}$ respectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujusunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n}{m}-1}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ A^3B^2C momentum $3aA^2B^2C + 4bA^3B^2C + 2cA^3B^2C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$, sive A^3B^{-2} , momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstratur verò Lemma in hunc modum.

Caf. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum, AB , ubi de lateribus A & B decrant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, seu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$, seu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $ab + ba$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $ab + ba$. Q. E. D.

Caf. 2. Ponatur AB semper æquale G ; & contenti ABC , seu GC , momentum (per *Caf. 1.*) erit $gc + cg$, id est (si pro G & g scribantur

tur AB & $aB + bA$) $abc + bac + cab$. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. Q. E. D.

Caf. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuò semper æqualia; & ipsius A^2 , id est rectanguli AB , momentum $ab + ba$ erit $2aA$; ipsius autem A^3 , id est contenti ABC , momentum $abc + bac + cab$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujusunque A^n est naA^{n-1} . Q. E. D.

Caf. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1 , momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A , unà cum $\frac{1}{A}$ ducto in a , erit momentum ipsius 1 , id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$, seu ipsius A^{-1} , est $-\frac{a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1 , momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unà cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$, seu A^{-n} , erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

Caf. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A , momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a , per *Caf. 3*: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B , erit A^m æquale B^n , ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1} , & maA^{m-1} æquale nbB^{n-1} , seu $nbA^{\frac{n-m}{n}}$; ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b , id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{n-m}{n}}$. Q. E. D.

Caf. 6. Igitur Genitæ cujusunque, A^mB^n , momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n , unà cum momento ipsius B^n ducto in A^m , id est $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunt A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & si detur terminus C , momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A - B, D, 2E, 3F$.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus datæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eadem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujusunque dati.

Corol.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In Epistolâ quâdam ad D. J. Collinium nostratem 10 Decem: 1672 datâ, cum descripsissem methodum Tangentium, quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum communicatâ, subjunxi: *Hoc est unum particulare, vel Corollarium potius, methodi generalis, quæ extendit se citra molestem ullum calculum, non modo ad ducendum tangentes ad quasvis Curvas, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas aliasve Curvas respicientes, verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera de Curvitatibus, Arcibus, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum, &c. neque (quemadmodum Huddenii methodus de Maximis & Minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitativis surdis sunt immunes. Hanc methodum intextui alteri isti, quâ æquationum exegesis instituo, reducendo eas ad series infinitas. Hac tenus Epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente ^(d).*

PROP. VIII. THEOR. VI.

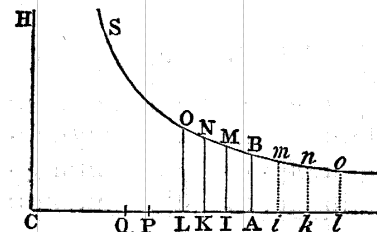
Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistantiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) investigentur vires absolutæ; dico, quod vires illæ absolutæ sunt in progressionem geometricâ.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistantia per lineam indefinitam AK; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP, quæ sit media proportionalis

^(d) *Scholium Editionis Primæ & Secundæ.*

In literis quæ mihi cum Geometrà peritissimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æquæ ac in rationalibus procederet, & literis transmissis hanc sententiam involventibus [Datâ æquatione quocunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice versâ] eandem celarem: rescripsit Vir Clarissimus, se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit à meâ vix abludentem præterquam

proportionalis inter AK & AC, ideoque in subduplicatâ ratione resistantiæ; incrementum resistantiæ, datâ temporis particulâ, factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro c, asymptotis rectangulis, CA, CH, describatur hyperbola quævis BNS, erectis perpendicularis AB, KN, LO occurrens in B, N, O. Quoniam AK est ut APq, erit



hujus momentum KL ut illius momentum 2APQ: id est, ut AP in KC; nam velocitatis incrementum PQ (per motus Leg. 2.) proportionale est vi generanti KC. Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN, & fiet rectangulum KL×KN ut AP×KC×KN;

hoc est, ob datum rectangulum KC×KN, ut AP. Atqui areæ hyperbolicæ KNOL ad rectangulum KL×KN ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescens est ut AP. Componitur igitur area tota hyperbolica ABOL ex particulis KNOL velocitati AP semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est (e). Dividatur jam area illa in partes æquales ABMI, IMNK, KNOL, &c. & vires absolutæ AC, IC, KC, LC, &c. erunt in progressionem geometricâ. Q. E. D. Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti A, æquales areas ABmi, imnk, knol, &c. constabit quod vires absolutæ AC, ic, kc, lc, &c. sunt continuè proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ IC, kc, lc, ic, AC, IC, KC, LC, &c. erunt continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam ABNK; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis, & resistantia medii per lineas AC, AP & AK respectivè; & vice versa.

præterquam in verborum & notarum * formulis & Ideâ generationis quantitatum *. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

^(e) Nimirum, tempore æquabiliter fluente, area BALO eâ lege fluit, ut illius fluxiones velocitatum corporis cadentis inter se rationes gerant. Sed tempore æquabiliter fluente, spatii, quod casu recto corporis conficitur, fluxiones velocitatum quoque rationes induent. Areæ igitur BALO spatii quæ casu recto corporis conficitur, fluxiones proportionem inter se convenient. Area igitur ipsâ spatiumque, cum simul à nihilo generari inceperint, proportionem inter se convenient. (Geometr. Flux. Prop. IV.)

* Hæc verba sunt editionis secundæ. A primâ aberant.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus, in infinitum descendendo, potest unquam acquirere, exponens est linea AC.

Corol. 3. Igitur si in datâ aliquâ velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

PROP. IX. THEOR. VII.

Positis jam demonstratis, dico quod, si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi à loco summo ut sector hyperbolæ.

Rectæ AC, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D, semidiametro AD, describatur tum circuli quadrans ATE; tum hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A, & asymptoton DC. Ducantur DP, DP, & erit sector circularis ATE ut tempus omne ascendendi ad locum summum; & sector hyperbolicus ATD ut tempus omne descendendi à loco summo: si modò sectorum tangentes AP, AP sint ut velocitates.

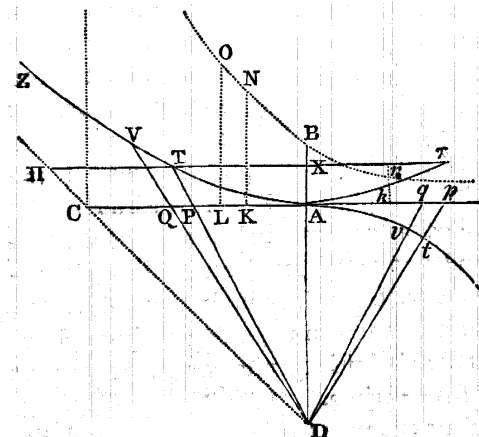
Cas. 1. Agatur enim DVQ abscindens sectoris ADT & trianguli ADP momenta, seu particulas quàm minimas simul descriptas, TDV & DPQ. Cum particule illæ, ob angulum communem D, sunt in duplicatâ ratione laterum, erit particula TDV ut $\frac{qDp \times AD \text{ quad.}}{pD \text{ quad.}}$, id est, ob datam TD, ut $\frac{qDp}{pD \text{ quad.}}$. Sed $pD \text{ quad.}$ est $AD \text{ quad.} + AP \text{ quad.}$ id est, $AD \text{ quad.} + AD \times AK^{(f)}$, seu $AD \times CK$; & qDp est $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo sectoris particula TDV est ut $\frac{pq}{CK}$; id est, ut velocitatis decrementum quàm minimum pq directè, & vis illa cK, quæ velocitatem diminuit, inversè; atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis respondens (g). Et, componendo, fit summa particularum

(f) Sive AC quad. + AC x AK; id est (Elem. II. 3.) AC x CK, sive propter AC, AD inter se æquales, AD x CK.

(g) Nam fluxio velocitatis, erit ut vis illa quæ velocitatem mutat, & fluxio temporis conjunctum. Quare fluxio temporis erit ut fluxio velocitatis directè et vis illa quæ velocitatem mutat, contrariè.

ticularum omnium TDV in sectore ADT, ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis AP particulis amissis pq respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus ADT est ut tempus totum ascendendi ad locum summum. Q. E. D.

Cas. 2. Agatur DVQ abscindens tum sectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quàm minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particule ad invicem ut DTq ad DPq, id est (si TX & AP parallelæ sint) ut DXq ad DAq vel TXq ad APq, & divisim ut DXq-TXq ad



DAq-APq. Sed, ex naturâ hyperbolæ, DXq-TXq est ADq, & per hypothefin APq est AD x AK. Ergo particule sunt ad invicem ut ADq ad ADq-AD x AK; id est, ut AD ad AD-AK, seu AC ad CK; ideoque sectoris particula TDV est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$ (h); atque E ideo ob datas AC &

AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideo ut particula temporis incremento respondens (i). Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particule PQ generantur, ut summa particularum sectoris ATD, id est, tempus totum ut sector totus. Q. E. D.

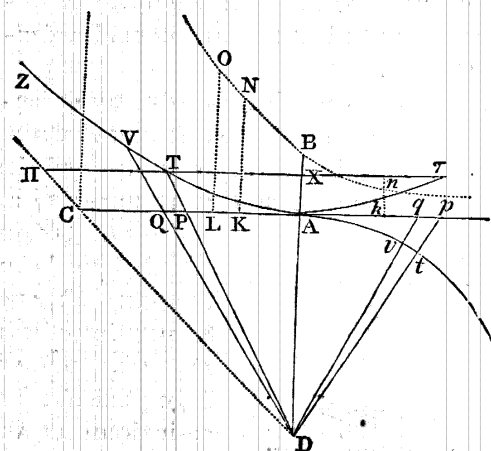
Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC, spatium, quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area ABNK, quâ spatium ca-

contrariè.

(h) Sive $\frac{1}{2} AD \times PQ \times AC}{CK}$.

(i) Vide Not. 6.

dendo descriptum exponitur, ad aream ATD , quâ tempus exponitur. Nam cum fit AC ad AP ut AP ad AK , erit (per Corol. 1.



Lem. 2. hujus) LK ad PQ ut $2AK$ ad AP , hoc est, ut $2AP$ ad AC , & inde LK ad $\frac{1}{2}PQ$ ut AP ad $\frac{1}{4}AC$, vel AB ; est & KN ad AC , vel AD , ut AB ad CK ; itaque ex æquo $LKNO$ ad DPQ ut AP ad CK . Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC . Ergo rursus ex æquo $LKNO$ est ad DTV ut

AP ad AC ; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam, quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta, $LKNO$ & DTV , sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ $ABNK$ & ATD ut spatia tota ab initio descensus descripta. Q. E. D.

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio, quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne fit ad spatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore descriptum, ut est area $ABnk$ ad sectorem ADt .

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum APD ad sectorem hyperbolicum ATD . Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus ATD , & in medio resistente est ut AP , id est, ut triangulum APD . Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ ATD , APD .

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum APD ad sectorem circulem A/D ; sive ut recta Ap ad arcum At .

Corol.

Corol. 5. Est igitur tempus, quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam AC in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut sector ADT ad triangulum ADC : & tempus, quo velocitatem Ap in medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus At ad ejus tangentem Ap .

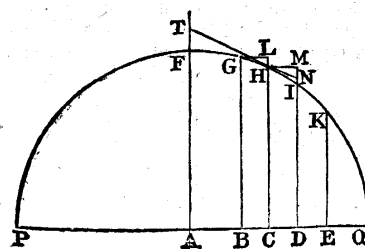
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima (per Corol. 2 & 3. Theor. vi. Lib. 2.) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et fumendo sectorem ADT , vel ADt , ad triangulum ADC in ratione temporis dati ad tempus modò inventum; dabitur tum velocitas AP vel Ap , tum area $ABNK$ vel $ABnk$, quæ est ad sectorem ADT vel ADt ut spatium quæsitum ad spatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam antè inventâ, uniformiter describi potest.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensu vel descensu spatii $ABnk$ vel $ABNK$, dabitur tempus ADt vel ADT .

PROP. X. PROB. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.

Sit PQ planum illud plano schematis perpendiculare; $PFHQ$ lineâ curva huic occurrens in punctis P & Q ; G, H, I, K loca

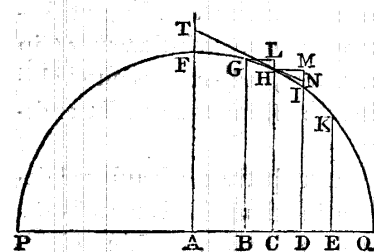


quatuor corporis, in hac Curvâ, ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE Ordinatæ quatuor parallele ab his punctis ad horizontem demissæ, & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E insistentes; & sint BC, CD, DE distantie Ordinarum inter se æquales. A punctis

tis.

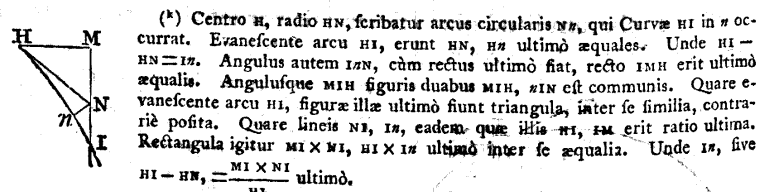
DE MOTU
CORPORUM

tis G & H ducantur rectæ, GL, HN, Curvam tangentes in G & H, & ordinatis, CH, DI, sursum productis occurrentes in L & N;



& compleatur parallelogrammum HCDM. Et tempora, quibus corpus describit arcus GH, HI, erunt in subduplicatâ ratione altitudinum, LH, NI, quas corpus temporibus illis describere possit, à tangentibus cadendo; & velocitates erunt ut longitudines descriptæ, GH, HI, directè, & tempora inversè. Exponentur tempora per τ & t , & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & decrementum velocitatis, tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à resistentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitatis, in corpore cadente & spatium NI cadendo describente, generat velocitatem, quâ duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ut Galileus demonstravit; id est, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI describente, auget arcum illum solâ longitudine HI - HN, seu $\frac{MI \times NI}{HI}$ (^k); ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem

2NI



(^k) Centro N, radio HN, scribatur arcus circularis NN, qui Curvæ HI in N occurrat. Evanescente arcu HI, erunt HN, NI ultimò æquales. Unde HI - HN = IN. Angulus autem IHN, cùm rectus ultimò fiat, recto IMN erit ultimò æqualis. Angulusque MIN figuris duabus MIN, NIN est communis. Quare evanescente arcu HI, figuræ illæ ultimò sunt triangula, inter se similia, contrariè posita. Quare lineis NI, IN, eadem quæ illis NI, IN erit ratio ultima. Rectangula igitur MI x NI, HI x IN ultimò inter se æqualia. Unde IN, sive

$$HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI} \text{ ultimò.}$$

(^l) Vide Lib. I. Sect. XIII. Scholium, Not. °.

(^m) Nempe $GH = \frac{QR^2}{\sqrt{1+QQ}}$

$$\text{Quare } \frac{t \times GH}{T} = \frac{R^2 + \frac{1}{2}QR^2}{R} \sqrt{1+QQ} - \frac{R^2 + \frac{1}{2}QR^2}{\sqrt{1+QQ}} Q$$

$\frac{2NI}{t}$; resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad 2NI.

Jam pro abscissis CB, CD, CE scribatur -v, 0, 20. Pro ordinatâ CH scribatur p, & pro MI scribatur series quælibet $QQ + R00 + 50^3 + \&c.$ Et seriei termini omnes post primum, nempe $R00 + 50^3 + \&c.$ erunt NI (^l), & ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Q0 - R00 - 50^3 - \&c.$ $P - 2Q0 - 4R00 - 850^3 - \&c.$ & $P + Q0 - R00 + 50^3 - \&c.$ respectivè. Et quadrando differentias ordinarum, BG - CH, & CH - DI, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata; $00 + QQ00 - 2QR0^3 + \&c.$ & $00 + QQ00 + 2QR0^3 + \&c.$ Quorum radices $0\sqrt{1+QQ} - \frac{QR00}{\sqrt{1+QQ}}$, & $0\sqrt{1+QQ} + \frac{QR00}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus GH & HI. Præterea, si ab ordinatâ CH subducatur semisumma ordinarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI subducatur semisumma ordinarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK sagittæ, $R00$, & $R00 + 350^3$. Et hæc sunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum τ & t : & inde ratio $\frac{t}{\tau}$ est $\sqrt{\frac{R+350}{R}}$, seu $\frac{R+350}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3500}{2R} \sqrt{1+QQ}$ (^m). Et cùm 2NI sit 2R00, resistentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3500}{2R} \sqrt{1+QQ}$ ad 2R00, id est, ut $35\sqrt{1+QQ}$ ad 4RR.

Velocitas autem ea est, quâcum corpus de loco quovis H, secundum tangentem HN egrediens, in parabolâ, diametrum HC &

$$\text{Sed } HI = 0\sqrt{1+QQ} + \frac{QR0^2}{\sqrt{1+QQ}} = \frac{R^2\sqrt{1+QQ}}{R} + \frac{R^2}{\sqrt{1+QQ}} Q$$

$$\text{Quare } \frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{1}{2}QR^2}{R} \sqrt{1+QQ} - \frac{2R^2 + \frac{1}{2}QR^2}{\sqrt{1+QQ}} Q$$

Rursum evanescente Q , $MI = Q0$ ultimò, & $NI = R^2$ ultimò.

Quare $2MI \times NI = 2R^2 Q0$ ultimò.

$$\text{It } \frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{2R^2}{0\sqrt{1+QQ} + \frac{QR0^2}{\sqrt{1+QQ}}} Q = \frac{2R^2}{\sqrt{1+QQ}} Q \text{ ultimò.}$$

$$\text{Quare } \frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{\frac{1}{2}QR^2}{R} \sqrt{1+QQ} - \frac{2R^2 + \frac{1}{2}QR^2}{\sqrt{1+QQ}} Q + \frac{2R^2}{\sqrt{1+QQ}} Q = \frac{3500}{2R} \sqrt{1+QQ} \text{ ultimò.}$$

latus.

Sed

latus rectum $\frac{HN^2}{NI}$ feu $\frac{1+QQ}{R}$ (^D) habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et refistentia est ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctum; & propterea medii densitas est ut refistentia directe & quadratum velocitatis inverse, id est, ut $\frac{3^S \sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe, & $\frac{1+QQ}{R}$ inverse, hoc est, ut $\frac{S}{R \sqrt{1+QQ}}$. Q. E. I.

Corol. 1. Si tangens HN producat utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$ (^o), ideoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Quâ ratione refistentia erit ad gravitatem ut $3^S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC \sqrt{R}}$, & medii densitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, si curva linea PFHQ definiatur per relationem inter basem, seu abscissam, AC, & ordinatim applicatam CH, ut moris est; & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expedite solvetur, ut in Exemplis sequentibus.

Exempl. 1. Sit linea PFHQ femicirculus super diametro PQ descriptus, & requiratur medii densitas, quæ faciat, ut projectile in hac lineâ moveatur.

Bifecetur diameter PQ in A; dic AQ, n ; AC, a ; CH, e ; & CD, o : & erit DI seu $AQ - AD = nn - aa - 2ao - oo$, seu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum nostram (P) extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^5} - \frac{a^3 o^3}{2e^5} - \&c.$ Hic scribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{noo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \&c.$

Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinite parva o non extat; secundum, in quo quantitas illa est unius dimensionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo tri-

(^a) Nempe $HN^2 = HM^2 + MN^2$. Sed $HM^2 = oo$: et evanescente cd , vel o , $MN = QO$ ultimò, et $MN^2 = QO^2$. Quare $HN^2 = oo \times 1 + QQ$. Rursum $NI = RO$ ultimò. Quare $\frac{HN^2}{NI} = \frac{oo \times 1 + QQ}{RO} = \frac{1+QQ}{R}$.

(^c) Propter duas rectas DN, AT, cum tertiâ CH parallelas, erit HT ad AC ut HN ad CD. Unde

um est; & sic in infinitum. Et primus terminus, qui hic est e , LIBER SECUNDUS. denotabit semper longitudinem ordinatæ, CH, insistentis ad initium indefinitæ quantitatis o . Secundus terminus, qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id est, lineolam MN, quæ abscinditur complendo parallelogrammum HCDM, atque ideo positionem tangentis HN semper determinat; ut in hoc casu capiendo MN ad HM ut est $\frac{ao}{e}$ ad o , seu a ad e . Terminus tertius, qui hic est $\frac{noo}{2e^3}$, designabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & Curvam; ideoque determinat angulum contactus IHN, seu curvaturam quam curva lineâ habet in H. Si lineola illa IN finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium unâ cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini sequentes evadent infinite minores tertio, ideoque neglegi possunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum serierum in solutione Problematum, quæ pendent à Tangentibus & Curvaturâ Curvarum (^q).

Conferatur jam series $e - \frac{ao}{e} - \frac{noo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \&c.$ cum serie $P - QO - ROO - 6o^3 - \&c.$ & perinde pro P, Q, R & S, scribatur e , $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ scribatur $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$, seu $\frac{n}{e}$; & prodibit medii densitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, seu $\frac{AC}{CH}$, id est, ut tangentis longitudo illa HT (^r), quæ ad semidiametrum AF ipsi PQ normaliter insistentem, terminatur: & refistentia erit ad gravitatem ut

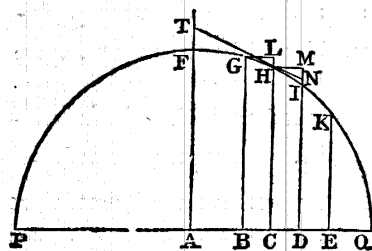
$$HT \times CD = AC \times HN. \text{ Sive } HT \times o = AC \times o \times \sqrt{1+QQ}. \text{ Unde } \frac{HT \times o}{AC \times o}, \text{ sive } \frac{HT}{AC}, = \sqrt{1+QQ}.$$

(^p) Vide Analyf. per Æquat. Infin. Cap. III. § 5. & Geometr. Analyt. Cap. I. § 8.

(^q) Confer Lib. I. Sect. 13. Scholium, & Scholium ad finem Libri De Quadraturâ Curvarum.

(^r) Nimirum juncta AH efficeret triangula duo AHC, AHT inter se similia, propter angulos ad c et h rectos, angulosque CHA, HAT inter se æquales. Quare AC:CH=TH:HA. Arithmetice igitur $\frac{AC}{CH} = \frac{TH}{HA}$. Unde, propter datam HA, erit quantitas $\frac{AC}{CH}$ ut recta TH.

3a ad 2n, id est, ut 3AC ad circuli diametrum PQ: velocitas autem erit ut \sqrt{CH} . Quare si corpus iustâ cum velocitate secundum

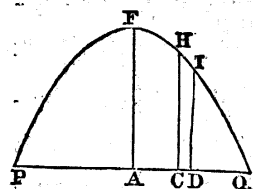


lineam ipsi PQ parallelam exeat de loco F, & medii densitas in singulis locis, H, sit ut longitudo tangentis HT, & resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut 3AC ad PQ, corpus illud describet circuli quadrantem

FHQ. Q. E. I.

At si corpus idem de loco P, secundum lineam ipsi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu semicirculi PFQ moveri inciperet, sumenda esset AC, seu a , ad contrarias partes centri A; & propterea signum ejus mutandum esset, & scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{c}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus, ascendendo à P, describat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à resistente impediri (*).

Exempl. 2. Sit linea PFQ Parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsâ moveatur.

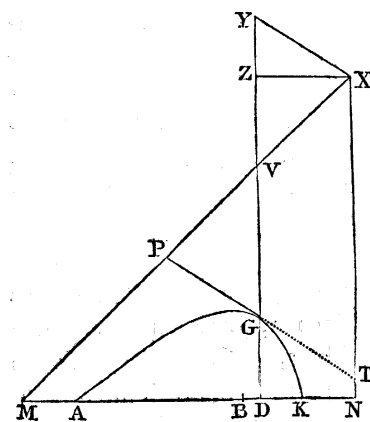


Ex naturâ Parabolæ, rectangulum PDQ, æquale est rectangulo sub ordinatâ DI & rectâ aliquâ datâ: hoc est, si dicantur recta illa b ; PC, a ; PQ, c ; CH, e ; & CD, o ; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$, seu $ac - aa - 2ao + co - oo$, æquale est rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b} + \frac{c-2a}{b}o - \frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro QO , tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro ROO . Cum verò plures non sint termini, debet quartus coefficientens s evanescere; & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui me-

dii

(*) Et vix magis naturaliter fieri possit, meo saltem iudicio, ut corpus, à loco P projectum, per circuli

dii densitas proportionalis est, nihil erit. Nullâ igitur medii densitate movebitur projectile in Parabolâ, uti olim demonstravit Galileus. Q. E. I.



Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quærat medii densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hac lineâ.

Sit MX asymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V; & ex naturâ hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG.

Sit illud bb : & completo parallelogrammo DNXX; dicatur BN, a ; BD, o ; NX, c ; & ratio data vz ad zx, vel DN, ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, vz æqualis $\frac{m}{n}a-o$, & GD, seu NX-vz-VG, æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in seriem convergentem, $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^2}o^2 + \frac{bb}{a^3}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^2}o^2-\frac{bb}{a^3}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro QO , tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^2}o^2$ pro RO^2 , & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^3}o^3$ pro SO^3 , eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}, \frac{bb}{a^2}$ & $\frac{bb}{a^3}$ scribendæ sunt in regulâ superiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii densitas ut

$\frac{bb}{a^3} \sqrt{1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}}}$; id est, si in vz sumatur vy æqualis vg, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sunt

circuli quadrantem FQ deferatur. Cum ad talem corporis motum eâ opus esset materiæ, per quam iter ei faciendum esset, densitate, quæ in loco summo & nulla esset, in loco Q infinita.

DE MOTU
CORPORUM

reciprocè ut xy . Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{cc}A^2 - \frac{2dndb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}$ ipsarum xz & zy quadrata (aa). Resistencia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3s$ in $\frac{xy}{A}$ ad $4RR$, id est, ut xy ad $\frac{2nn+2n}{n+2}vg$ (bb). Et velocitas ibidem ea ipsa est, quâcum corpus projectum in Parabolâ pergeret, verticem G , diametrum GD , & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2xy \text{ quad.}}{nn+n \text{ in } VG}$ habente (cc). Q. E. I.

Scolium.

$$\text{Et } 1+QQ = 1 + \frac{dd}{cc} + \frac{2dndb}{eA^n} + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}. \text{ Et } A\sqrt{1+QQ} = \sqrt{AA + \frac{dd}{cc}AA - \frac{2dndb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}$$

$$\text{Unde densitas } \frac{n+2}{3A\sqrt{1+QQ}} = \frac{n+2}{3\sqrt{AA + \frac{dd}{cc}AA - \frac{2dndb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$$

(aa) NEMPE $zx = dn = A - O$. Hinc evanescente bd vel o , $zx = A$ ultimò, et $zx^2 = AA$ ultimò. Rursum $vy = nyg = \frac{abb}{dn^n} = \frac{nbb}{A^n}$ ultimò. Et $vy = \frac{d}{e}dn = \frac{d}{e}A$ ultimò.

Quare $zy = vy - yz = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$ ultimò. Unde $zy^2 = \frac{dd}{cc}AA - \frac{2dndb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}$

Hinc $\sqrt{AA + \frac{dd}{cc}AA - \frac{2dndb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}} = \sqrt{zx^2 + zy^2} = xy$. Unde densitas $= \frac{n+2}{3xy}$. Ac proinde, propter numeros $n+2$ et 3 datos, densitas rationem quantitatis xy contrariam servat.

(bb) $xy = \sqrt{AA + \frac{dd}{cc}AA - \frac{2dndb}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}$ (per Not. aa) $= A\sqrt{1+QQ}$ (per Not. a). Ergo $xy = A\sqrt{1+QQ}$. Et per Cor. 1. $A\sqrt{1+QQ} = \sigma T$. Quare rectæ σT , xy inter se æquales.

Rursum renixus materiæ erit ad vim gravitatis, in loco G , ut $\frac{3s \times \sigma T}{A}$ ad $4RR$ (per Cor. 1.) Erit igitur renixus ille ad vim gravitatis ut $\frac{3s \times xy}{A}$ ad $4RR$, hoc est ut, $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{2A^{n+4}}bbxy$ ad $\frac{nn+n}{A^{2n+4}}b^4$.

Sive ut $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{2A^{n+4}}.xy$ ad $\frac{2nn+n}{2A^{n+4}}bb$; vel dividendo quantitate $\frac{nn+n}{2A^{n+4}}$, ut $\frac{n+2}{nn+n}A^n.xy$ ad $2vg \times dn^n$. Evanescente autem rectâ bd , factique bn^n , dn^n ultimò inter se æqualibus, erit $\frac{n+2}{nn+n}bn^n.xy$ ad $2vg \times dn^n$ ultimò ut $\frac{n+2}{nn+n}xy$ ad $2vg$, hoc est ut xy ad $\frac{2nn+2n}{n+2}vg$. Renixus igitur materiæ ad vim gravitatis, in loco hyperbolæ G , erit ut xy ad $\frac{2nn+2n}{n+2}vg$.

(cc) $1 + \frac{dd}{cc}$ LIBER
SECUNDUS.

Scolium.

Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, si resistencia ponatur ut velocitatis, v , dignitas quælibet v^n , prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^2} \times \frac{AC}{HT}^{n-1}$ (dd). Et propterea si

Curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^2}$ ad $\frac{HT}{AC}^{n-1}$,

$$^{(cc)} 1+QQ = \frac{xy^2}{A^2} \text{ (Not. bb.)} \text{ Sed } x = \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bb. \text{ Ergo } \frac{1+QQ}{R} = \frac{2xy^2.A^n}{nn+n.bb} = \frac{2xy^2.BN^n}{nn+n.vg.BN^n} = \frac{2xy^2}{nn+n.vg}$$

(dd) NEMPE Formula, per quam vis renitentis materiæ ad vim gravitatis rationem Newtonus representari docuit, ea quàm maximè generalis est: ac quæcumque fuerit lex, quâ vim illam renixus velocitatibus attemperari ponas, ratio vis ejus ad vim gravitatis semper ea erit, quæ quantitatis $3s\sqrt{1+QQ}$ ad quantitatem $4RR$: quantitibus utique illis, s , Q , R , pro varia lege renixus variis.

Velocitas quoque quâcum corpus per Curvam FGQ latum (vid. fig. p. 289) à loco n discedit, pro omni lege renixus, ea erit quâcum ex eodem loco n secundum rectam HN emitti oporteret, ut secundum ductum Parabolæ, diametro nc , latere recto cujus illud $\frac{1+QQ}{R}$ symbolum esset, per inane ferri posset.

Denique, quæcumque fuerit lex renixus, manet æquatio illa, Corollario primo constituta, $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1+QQ}$.

Quæcumque igitur fuerit renixus lex, velocitas quantitatis $\frac{1+QQ}{R}$ rationem subduplicatam servabit, secundum doctrinam Galilæi. Erit igitur velocitas ut $\left[\frac{1+QQ}{R}\right]^{\frac{1}{2}}$. Ponamus igitur renixum esse ut densitas materiæ et potestas velocitatis à numero n denominata conjunctim, hoc est literâ r renixum significante, literâ v densitatem, literâ v velocitatem, ponamus r esse ut $D \times v^n$; itaque erit D ut $\frac{r}{v^n}$. At verò cum r fit ad vim gravitatis æquabilem ut $3s\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, si

pro vi illâ æquabili gravitatis ponatur 1 , erit $r = \frac{3s\sqrt{1+QQ}}{4RR} = \frac{3s}{4RR} \times \frac{HT}{AC}$. Rursum velocitas five v , cum fit ut $\left[\frac{1+QQ}{R}\right]^{\frac{1}{2}}$, hoc est ut $\frac{HT}{R^2 \times AC}$, erit v^n ut $\frac{HT^n}{R^2 \times AC^n}$. Ergo $\frac{r}{v^n} = \frac{3s}{4RR} \times \frac{HT}{AC} \times \frac{R^2 \times AC^n}{HT^n}$

$\frac{r^n \times AC^n}{HT^n} = \frac{3s}{4RR^2} \times \frac{AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$. Hujus igitur quantitatis rationem, illa D , five densitas materiæ,

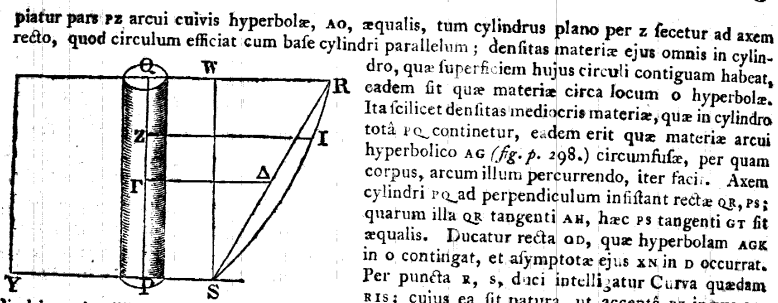
constanter servabit. Propter numeros autem $3, 4$, datos, hujus etiam, $\frac{3}{4RR^2} \times \frac{AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, eadem ratio erit.

vel

DE MOORE
CORPORUM

Reg. 5. Si dantur longitudines AH, AI, & describenda sit figura AGK: produc HN ad x, ut fit HX ad AI ut $n+1$ ad 1: centroque x, & asymptotis MX, NX, per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut fit AI ad quamvis vq ut xvⁿ ad x1ⁿ.

Reg.



piatur pars pz arcui cuius hyperbolæ, AO, æqualis, tum cylindrus plano per z secetur ad axem recto, quod circulum efficiat cum base cylindri parallelum; densitas materiæ ejus omnis in cylindro, quæ superficiem hujus circuli contiguam habeat, eadem sit quæ materiæ circa locum o hyperbolæ. Ita scilicet densitas mediocris materiæ, quæ in cylindro totâ pQ continetur, eadem erit quæ materiæ arcui hyperbolico AG (fig. p. 298.) circumfusa, per quam corpus, arcum illum percurrente, iter facit. Axem cylindri pQ ad perpendicularum insistant rectæ qg, ps; quarum illa qg tangenti AH, hæc ps tangenti GT sit æqualis. Ducatur recta on, quæ hyperbolam AGK in o contingat, et asymptotæ ejus xn in d occurrat. Per puncta r, s, duci intelligatur Curva quædam RIS; cujus ea sit natura, ut acceptâ pz in axe cylindri arcui cuiuslibet hyperbolæ, AO, æquali, educatæque à puncto z ad perpendicularum rectâ zi Curvam usque, rectangulum zi x od rectangulo qg x ps æquale sit. Ducatur per s recta sw cum rectâ pQ parallela, quæ rectæ qg in w occurrat. Cum æqualia sint rectangula illa zi x od, qg x ps, idcirco erit zi ad ps ut qg, vel AH, ad od. Sed ut AH ad od, ita est densitas materiæ in loco o hyperbolæ ad densitatem in loco A. (Exempl. 4.) Densitas autem, circa loca A, o hyperbolæ, eadem sunt quæ circa loca r, z, cylindri. Quapropter zi erit ad ps ut densitas materiæ in cylindro circa punctum z ad densitatem circa punctum r. Et in omni situ puncti z idem obtinebit. Unde sequetur, quantitatem materiæ omnis in cylindro pQ ad quantitatem materiæ, quam uniformi densitate præditam æquale spatium cylindraceum contineret, si densitas illa uniformis ea esset, quæ materiæ circa locum p cylindri vel A hyperbolæ: sequetur inquam, quantitatem materiæ omnis in cylindro ad hujus alterius quantitatem rationem habere eam, quam spatium xqpsia ad rectangulum qg; vel si ad rectam pQ applicetur rectangulum qy spatio illi xqpsia æquale, eam quam recta vp ad rectam ps vel GT. Ostendendum igitur rectam yp tangentium AH, GT summâ dimidiatâ paulo esse majorem.

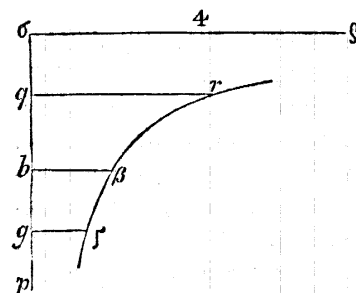
Jungatur sx. Media dividatur recta pQ in puncto r; agaturque rA cum qg, ps parallela, quæ rectæ sx in A occurrat. A puncto o hyperbolæ ducatur os in asymptotam XM, cum alterâ asymptotâ xn parallela. Cum è naturâ hyperbolæ quantitas NLⁿ x so datæ cuidam sit æqualis; si rectam NL litera y designet, rectam so litera x, erit yⁿ x x datæ cuidam æqualis. Unde yⁿ⁻¹ y: x = yⁿ: x (Geometr. Flux. Prop. VIII. Cor. 3.) Ac proinde j: x = $\frac{y}{n}$: x = y: nx.

Et jy: x = $\frac{y^2}{n^2}$: x. Et jy: jx + x = $\frac{y^2}{n^2}$: y² + n²x². Et j: $\sqrt{jy + x} = y: \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Sed $\sqrt{jy + x} = AO$. Quare j: AO = y: $\sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Sed j: AO = NL vel y: od. Quare y: od = $y: \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Hinc od = $\sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Unde si rectangulum datum qg x ps dicatur b², erit $\frac{b^2}{od} = \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + n^2x^2}}$. Sed è naturâ Curvæ ris, $\frac{b^2}{od} = zi$. Quare zi = $\frac{y^2}{\sqrt{y^2 + n^2x^2}}$.

Rursum, cum sit jy: x = y²: n²x², erit jy = $\frac{y^2}{n^2x^2}$ x. Quare jy + x = $\frac{y^2}{n^2x^2} x + x = \frac{y^2}{n^2x} + x = \frac{y^2 + n^2x^2}{n^2x}$. Et pz (= AO) = $\sqrt{jy + x} = \frac{\sqrt{y^2 + n^2x^2}}{n^2x}$. Hinc xi x pz, five fluxio areæ spzi, = $\frac{y^2 + n^2x^2}{n^2x}$.

Expositâ igitur rectâ quavis infinitâ qg, si in eâ capiatur qg, quæ habeat ad ps rationem eam quam i ad a: educatæque à punctis q, g ad perpendicularum qg, gr, quarum illa qg infinita sit, altera gr rectæ qg æqualis; si centro o, asymptotis illis qg, qg, scribatur hyperbola conica, quæ per punctum r transeat sumptisque qg, qg illis vo, os (fig. p. 298) æqualibus, si à punctis g, b, educantur ad perpendicularum gr, b, hyperbolam usque; erit area hyperbolica b, b, areæ spzi æqualis, et harum fluxiones erunt

Reg. 6. Quo major est numerus n, eo magis accuratæ sunt hæc hyperbolæ in ascensu corporis ab A, & minus accuratæ in ejus descensu ad K; & contrâ (kk). Hyperbola conica mediocrem rationem



erunt inter se æquales. Nam cum qg sit ad ps ut 1 ad n, propter æquales qg, qg, erit qg x gr ad ps x qg, five ad b², ut 1 ad n. Unde qg x gr = $\frac{b^2}{n}$, & Or-

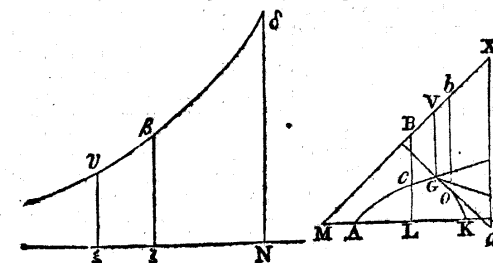
dinata hyperbolæ b, b = $\frac{b^2}{n}$ = $\frac{b^2}{n}$: nempe cum ob æqualis sit illi os (id enim posuimus) quam litera x significat. Quare b, b x $\frac{b^2}{n}$, five b, b x x, fluxio areæ hyperbolice b, b, quantitati $\frac{b^2}{n}$ æqualis, cui

etiam zi x pz, fluxio areæ spzi, ostensa est æqualis. Hinc si ordinatam hyperbolæ, b, b, litera v genera- liter significet, erit zi x pz = vx. Vel si arcus AO,

eique æqualis recta pz ponatur æquabiliter fluere, et pro datâ pz, more Newtoniano, scribatur i: erit zi = vx. Rectanguli vx latera, v, x, contrariè fluunt. Nam cum Curva AO (fig. p. 298) basin suam mx convexa respiciat, ordinatæ x fluxio secunda positiva erit. (Per Lemm. H. VIII.) Crescente igitur x fluxio ejus, x, crescat. At verò eadem x, seu ob, crescente, v, five b, b, è naturâ hyperbolæ conicæ decrescit. Decrescit igitur v dum illa x crescat. Rectanguli igitur fluentis vx latera contrariè fluunt. Quare rectanguli illius fluxio, quæ est fluxio rectæ zi, rectangulorum vx, vx dif-

ferentia erit. Quare zi = vx - vx. Et zi + vx = vx. Rursum crescente x fluxio ejus secunda minuitur usque; siquidem illa x infinitè crescente, fluxio ejus datæ arcus AO infinitè crescentis fluxioni sit ultimò æqualis; ac proinde fluxio ejus secunda nihilo sit ultimò æqualis. Crescente autem x illa v minuitur usque, ut suprâ ostendimus. Rectanguli igitur fluentis vx latera, v, x, eodem modo fluunt; et decrescendo utrumque si crescente arcu AO, vel rectâ pz, ipsa x crescat; ut tam x quam v negativa sit, et ipsius rectanguli vx fluxio negativa: -vx - vx. Rursum cum hyperbola conica r, b, atque altera illa AGK bases suas qg, xm, convexæ respiciant; erunt v, x positivæ (per Lemm. H. VIII). Dux igitur v, x eodem modo fluunt, et rectanguli vx fluxio erit vx + vx. Hinc cum sit zi + vx = vx, erit etiam zi + vx + vx = -vx - vx. Unde transponendo

zi = -vx - vx - vx. Rectæ igitur zi fluxio secunda negativa erit. Curva igitur s, s, cujus est illa zi ordinata, hæc basin suam pQ concava respiciet. (Lemm. H. VIII. Cor.) Trapezium igitur spqg areâ spqris, five rectangulo qy, minus erit. Sed propter trapezii latera qg, ps inter se parallela, angulosque ad q et p rectos, trapezium spqg rectangulo pQ x rA æquale erit. Quare rectangulum pQ x rA rectangulo qy, five pQ x ry minus erit. Rectangulum igitur pQ x ry rectangulo pQ x rA majus. Recta igitur ry rectâ rA major. Sed rA, propter latera trapezii qg, ps inter se parallela, duarum qg, ps, five duarum AM, GT est semissis. Recta igitur ry, quæ ad ps vel GT rationem habet eam, quam densitas mediocris materiæ arcui hyperbolico AG circumfusa ad propriam materiæ circa locum A densitatem, hæc major est quàm tangentium AM, GT summa dimidiata. Q. E. D.



(kk) Per punctum quodvis, o, in arcu ascensû AG, ducatur recta od, quæ hyperbolam AGK in o contingat, et asymptotæ xn in d occurrat; alique nol, cum asymptotâ xo parallela, quæ alteri asymptotæ xm in a occurrat, hyperbolæ basi mn in L. Datis xv, vo, xb, si augetur numerus n, minuetur usque recta ob, atque tali quidem lege,

net, & manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâ cum corpus projicitur, mutetur utcumque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HK (99), & inde datur parabolæ vertex X, & positio rectæ XI (100), & sumendo VG ad IA ut XV ad XI, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ projectile transibit.

S E C T I O III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.

P R O P. XI. T H E O R. VIII.

Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ in medio similiari movetur: sumantur autem tempora in progressionem arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciproce proportionales, datâ quâdam quantitate auctâ, erunt in progressionem geometricâ.

Centro c, asymptotis rectangulis CADD & CH, describatur hyperbola BEE, & asymptoto CH parallelæ sint AB, DE, de. In asymptoto CD dentur puncta A, G: et si tempus exponatur per aream

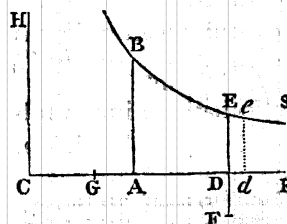
Rursum vis resistens, cum per idem Corollarium ea sit ad vim gravitatis motricem ut gx sit ad $4xx \times dx$, idcirco ad vim motricem gravitatis erit ut $\frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{2b^{n-1}} x^{n-3} GT$ ad $\frac{nn - n}{b^{2n-1}} x^{2n-3}$, five ut $x^3 - 3x^2 + 2n.GT$ ad $\frac{2.nn - n}{b^{n-1}} x^n$, five ut $\frac{n-2}{2nn-2n} GT$ ad $\frac{x^n}{b^{n-1}}$: hoc est, cum fit $\frac{x^n}{b^{n-1}} = VG$, ut $\frac{n-2}{2nn-2n} GT$ ad VG , vel ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2} VG$.

Rursum latus rectum parabolæ conicæ, quam corpus motu suo per inane scriberet, si è loco G, secundum rectam GT, eâ cum velocitate projectum fuerit, quam corpus per Curvam KX latum in loco illo G habet, hujus inquam parabolæ latus rectum, cum per idem Corollarium æquale sit rectæ hoc symbolo significatæ, $\frac{GT^2}{dx \times x}$; idcirco huic rectæ æquale erit, $\frac{2b^{n-1}}{nn - n.n} GT^2$; quæ vel hoc etiam symbolo significabitur, $\frac{2GT^2}{nn - n.VG}$; nempe cum illud b^{n-1} huic $\frac{x^n}{VG}$ æquale sit.

(99) DATA scilicet materiæ densitate, datâque etiam velocitate quâcum corpus è puncto A emissum est, rectas AH, AI magnitudine dari, id iisdem planè argumentis probare licet, quibus idem in hyperbolis ostendimus. (Vide Not. 98.) At verò rectam AX magnitudine quoque dari, id nunc ostendimus.

ream hyperbolicam ABED uniformiter crescentem; dico, quòd velocitas exponi potest per longitudinem DF, cujus reciproca GD, unâ cum datâ CG, componat longitudinem, CD, in progressionem geometricâ crescentem.

Sit enim areola Dxed datum temporis incrementum quàm minimum, & erit Dd reciproce ut DE, ideoque directe ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. II.) est $\frac{Dd}{GDd}$, erit ut $\frac{CD}{GDd}$, seu $\frac{CG+GD}{GDd}$; id est, ut $\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GDd}$. Igitur tempore ABED per additionem datarum particularum, EDde, uniformiter crescente, decrevit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per hypothefin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDd}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior, $\frac{CG}{GDd}$, est ut $\frac{1}{GDd}$: proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas (a). Et si quantitas GD, ipsi



ostendimus hoc modo. Agatur per A recta AP cum tangente AH parallela, quæ parabolæ diametro, NX, in P occurrat. Cum data sit recta AI magnitudine dabitur huic æqualis XP. (Æquales autem erunt AI, XP propter figuram AIXP parallelogrammam.) Ratio autem rectæ PX ad XN è parabolæ naturâ data. Nempe cum ea sit quæ unitatis est ad numerum n-1. Recta igitur XN magnitudine data (Dat. 2.) Q. E. D.

(*) NIMIUM ex dato quovis angulo NAH, dabitur positione recta AH. Unde ex datâ ejus longitudine datoque puncto A, punctum H dabitur. (Dat. 27.) Recta igitur HX, per datum punctum H in planum horizontis ad perpendicularum deducta, positione data. (Dat. 30.) Quare ex datâ etiam ejus longitudine datoque puncto H punctum X datum. (Dat. 27.) At vero recta AI magnitudine & positione data, punctumque A datum. Datum igitur punctum I. (Dat. 27.) Datis autem punctis X, I, recta XI positione data. (Dat. 26.) Q. E. D.

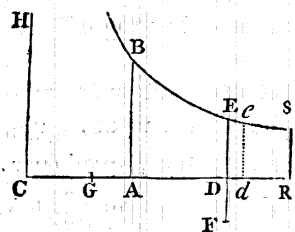
(c) Hæc est, ni fallor, argumentatio Newtoni.

In hyperbolæ cujusdam AX, positione datæ, asymptotâ CA, dato puncto quolibet G infra centrum hyperbolæ; si area hyperbolica, ABDE, quæ asymptotæ CA parte quavis AD, rectisque AB, DE, cum alterâ asymptotâ parallelis, interclusa est, motu rectæ DE, manente illâ AB, æquabiliter increseat, sitque DF recta, quæ cum rectâ GD, inter punctum datum G rectamque mobilem DE intercepit, rectangulum claudat datæ magnitudinis: summo decrescens rectæ DF erit ut ipsa DF parte quâdam aucta, quæ quadrati ex DF semper rationem geret.

At verò si corpus per materiam, vi resistens, qualis posita est, præditam, solâ vi insitâ impulsus progrediatur; tempore æquabiliter aucto, velocitas corporis eâ lege minuetur, ut fluxio ejus sit semper ut velocitas ipsâ parte quâdam aucta, quæ ipsius velocitatis rationem duplicatam geret.

Recta igitur DF corporis velocitatem, simili planè lege decrescens, optime representabit, modò aptè sumptum fuerit punctum G: vel etiam puncto G pro arbitrio assumpto, si talis sumatur DF quæ

Q. 2

De Motu
Corporumipfi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ CG augeatur;

summa CD, tempore ABED uniformiter crescente, crescet in progressionem geometricâ. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam ABED, exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocâ $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio,

quæ rectangulo GD x DF iustam reddat magnitudinem.

Rectam autem DF quo diximus modo fluere, id Newtonus hîc ferè argumentis probat.

Symbolo A^2 , significetur spatium illud datum, cui rectangulum GD x DF ponitur æquale. Jam propter rectangulum GD x DF datum, cuius tamen latera, GD, DF, contrariè fluunt, erit (per Geom. Flux. Prop. VIII. Cor. 3.) $DF : GD = DF : GD$. Rectarum verò GD, CD, propter earum differentiam CG datam, fluxiones inter se æquales erunt. (Geom. Flux.

Prop. v.) Quare $DF : CD = DF : GD$. Sed propter æqualem aream ABED fluxum, fluxio rectæ CD, è naturâ hyperbolæ, ipsius CD rationem geret; vel, quod idem est, recta CD fluxionis suæ. Si igitur capiatur DK, quæ sit semper ad CD, ut fluxio rectæ DF ad fluxionem rectæ CD, semper erit DK ut fluxio rectæ DF; et DK : CD = DF : GD. Sed cum punctum G sit infra centrum hyperbolæ, id enim omnino ponendum est, CD major erit quàm GD. Quare et DK major quàm DF. (El. v. 14.) Et cum DK sit ad CD ut DF ad GD, permutando et convertendo erit DK ad KF, ut CD ad CG. Dividendo $DF : FK = GD : CG$. Permutando $DF : GD = FK : CG$. Quare DF^2 erit ad $DF \times GD$, five ad datum spatium A^2 , ut FK ad datam rectam CG. Recta igitur FK, cum sit ad datam CG ut quadratum ex DF ad spatium datum, quadrati utique ex DF rationem constanter servabit. Et fluxio rectæ DF, cum ea sit ut DK, hoc est ut $DF + FK$, vel ut DF parte FK aucta, erit ut DF parte quâdam aucta, quæ quadrati ex DF rationem semper geret. Q. E. D.

Hyperbolâ autem BE cum asymptotis suis CA, CH positione datis, rectâque etiam AB, quæ cum asymptotâ CH parallela est, positione datâ; situs puncti G, qui efficiat ut rectæ DF, datum cum illis GD spatium continentes, velocitatum inter se rationes induant, dum areæ ABED temporum rationibus respondeant, is hæc ratione definiendus erit.

Sumantur ABEM, ABED, quæ temporum duorum T, Θ , rationem gerant; sumptâque rectâ MN hyperbolæ ordinatæ ML æquali, inveniatur alia DF quæ ad illam MN rationem habeat, quam velocitas corporis sub finem temporis Θ ad velocitatem ejus sub finem temporis minoris T. Inveniatur in rectâ DC punctum G, ut sit GD ad GM ut MN ad DF. Punctum G infra centrum erit hyperbolæ. Areâ enim ABEM æqualiter crescente, ordinata ML ratione Geometricâ decrescet. Quare fluxio rectæ ML ipsius ML rationem semper geret. Et si velocitas corporis eâ lege decresceret, ut fluxio ejus ipsius semper rationem servaret, hyperbolæ ordinata DE ad ordinatam ML, vel ejus æqualem rectam MN, rationem haberet, quam velocitas sub finem temporis Θ ad velocitatem sub finem temporis T. Namque area hyperbolica LMDE logarithmus est rationis quam ML habet ad DE. Et tempus $\Theta - T$ logarithmus esset rationis, quam velocitas sub finem temporis T ad velocitatem sub finem temporis Θ haberet, si geometricâ ratione velocitas decresceret. Sed area LMDE temporis $\Theta - T$ rationem servat. Unde, propter mutam logarithmorum competentiam, ratio velocitatis ad velocitatem eadem quæ rectæ ML ad rectam DE esset. Sed velocitas, cum

initio, ad velocitatis reciprocâ in fine temporis cujuscvis ABED, LIBER SECUNDUS. inveniatur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROP. XII. THEOR. IX.

Iisdem positis, dico, quod si spatia descripta sumantur in progressionem arithmeticâ, velocitates, datâ quâdam quantitate aucta, erunt in progressionem Geometricâ.

In asymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendicularo RS, quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur descriptum spatium per

cum eâ lege decrescat, ut fluxio ejus semper sit ut velocitas ipsâ parte quâdam aucta, quæ ipsius rationem duplicatam gerat, velocius utique decrescit, quàm ut fluxio ejus ipsius rationem servet. Ac propterea, dato quovis tempore, minor fiet, quàm si geometricâ ratione decrementum subiisset. Minor igitur, quàm illa DE, erit recta quæ ad ML, vel ejus æqualem MN, rationem habebit quam velocitas sub finem temporis Θ ad velocitatem sub finem temporis T. Quare DF minor erit quàm DE. Quare MN major erit, quàm ut habeat ad DF rationem eam, quam MN, vel ML, ad DE. (El. v. 8.) Sed $MN : DF = GD : GM$. (Id enim factum est.) Et $ML : DE = CD : CM$, propter hyperbolam. Quare GD major erit, quàm ut habeat ad GM rationem eam, quam CD ad CM. Convertendo, minor erit GD quàm quæ habeat ad DM rationem eam quam CD ad DM. Quare GD minor erit quàm CD. (El. v. 10.) Quare punctum G infra e centrum hyperbolæ. Et cum G sit ad GM ut MN ad DF, rectangula GD x DF, GM x MN erunt inter se æqualia. Et tempore Θ utcumque aucto, si capiatur area ABQF, quæ ad aream ABED rationem habeat, quam tempus illud majus ad tempus Θ , velocitas sub finem temporis illius majoris erit ad velocitatem sub finem temporis Θ ut recta QG, quæ cum GQ rectangulum contineat dato GM x MN æquale, ad rectam DF.

Sed leviori negotio efficere liceat, ut rectæ DF velocitatum rationes præ se ferant, si punctum G pro arbitrio sumatur. Sumatur enim. Sint r, u rectæ eâ lege mutabiles, ut illæ r renixis, illæ u velocitatis semper rationes gerant. Sit b recta datâ magnitudinis. Et talis ponatur lex renixus, ut sit semper $r = u + \frac{ur}{b}$. In asymptotâ CH capiatur co datâ b æqualis, et compleatur

rectangulum oc. Capiatur ca ejus longitudinis, ut cum datâ illâ rectæ u longitudine, qualem utique initio motus illa habuit, rectangulum contineat dato oc æquale. Tum u capiatur DF ejus semper longitudinis, quæ efficiat rectangulum DF x DG eidem oc æquale, illa DF ita fluat, ut velocitatis semper rationem servet, modò area ABED temporis rationem tueatur. Area enim ABED æqualiter fluente erit $DF = DF + \frac{DF^2}{A}$ CG (per ea quæ suprà offensa sunt). Vel si pro symbolo

A^2 rectangulum oc substituat, $DF = DF + \frac{DF^2}{oc} = DF + \frac{DF^2}{b}$. Sed $u = u + \frac{ur}{b}$. Quare si initio

fluxus illæ DF, u æquales fuerint, æquales tunc erunt earum fluxiones, et rectæ ipse, decrementis æqualibus imminutæ, æquales utique manebunt. Sunt autem, initio fluxus, illæ DF, u æquales. Tempore enim Θ paulatim imminuto, area ABED pari ratione paulatim minuitur, utque dum tempore Θ ad nihilum redactio, area ABED in nihilum simul abeat, ordinatâ DE cum illâ AB ultimò congruente. Recta verò DF, crescendo utique dum GD decrescat, ut rectangulo DF x GD sua constet magnitudo, rectæ AS magnitudinem ultimò adepta sit. Rectangulum igitur AS x GA dato oc æquale. Talis autem accepta est recta GA, quæ cum rectâ u, qualis utique initio motus illa fuit, rectangulum contineat illi oc æquale. Quare AS, quæ est longitudo rectæ DF, quam nascente areâ ABED primam illa habuit, eadem longitudo erit rectæ u, quam primam illa, nascente tempore Θ , habuit. Sunt igitur illæ DF, u initio fluxus inter se æquales. Quare æquales semper erunt, dummodo area ABED tueatur temporis rationem. Et tempore æqualiter aucto, cum area ABED æqualiter simul crescat, recta GD, quæ ipsius DF contrariam semper rationem gerit, datâ CG aucta, geometricâ ratione crescet.

aream

DE MOTU
CORPORUM

aream hyperbolicam $RSED$ (vid. fig. p. 308); & velocitas erit ut longitudo GD , quæ, cum datâ CG , componit longitudinem CD in progressionem geometricâ decrecentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in arithmeticâ.

Etenim ob datum spatii incrementum $EDde$, lineola dd , quæ decrementum est ipsius GD , erit reciproce ut ED , ideoque directè ut CD , hoc est, ut summa ejusdem GD & longitudinis datæ CG . Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula dde describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim; id est, directè ut summa duarum quantitatum, quarum unâ est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inversè ut velocitas; ideoque directè ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quàm lineæ GD , est ut quantitas data & quantitas decrecens conjunctim; & propter analogâ decrecentia, analogæ semper erunt quantitates decrecentes; nimirum velocitatis & lineæ GD (b). Q. E. D.

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem GD , spatium descriptum erit ut area hyperbolica $DESR$.

Corol. 2. Et si utcumque assumatur punctum R , invenietur punctum G , capiendò GR ad GD , ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis $RSED$ descriptum. Invento autem puncto G , datur spatium ex datâ velocitate, & contrâ.

Corol. 3. Unde cum (per Prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore

(*) Nimirum in hyperbolæ cujuscunque, RS , positione datæ, asymptotâ CA dato puncto G infra centrum (vid. fig. p. 308), si area hyperbolica $RSER$, quæ asymptotæ CA parte quavis AD , rectisquæ RS , DE , cum alterâ asymptotâ parallelis, interclusa est, motu rectæ DE versùs asymptotam CA , manente illâ RS , æquabiliter increseat; rectæ decrecentis GD fluxio erit semper ut GD datâ CG auctâ. Nam propter æquabilem areæ $SRDE$ fluxum, recta CD è naturâ hyperbolæ ratione geometricâ decrescet.

Quare fluxio rectæ CD ipsius GD rationem semper servabit. Unde ponere liceat $GD = CD$. (Geometr. Flux. Def. 5.) Sed rectarum GD , CD fluxiones, ob datam fluentium differentiam, CG , semper inter se æquales erunt. (Geometr. Flux. Prop. v.) Quare $GD = CD = CG + GD$.

Verùm si corpus per materiam, vi renixûs, qualis posita est, præditam, solâ vi inistâ impulsu progrediatur, tum si arithmetice sumantur itineris confecti spatia, velocitas corporis eâ quidem lege minuetur, ut fluxio ejus sit semper ut velocitas ipsa datâ quiddam auctâ. Sint enim s , v , a , r , rectæ eâ lege mutabiles, ut illæ s renixûs, illæ v velocitatis, illæ a itineris confecti, illæ r temporis quo conficitur iter s , rationem tueantur. Sit a recta datæ magnitudinis. Atque talis ponatur lex renixûs, ut sit semper $s = v + \frac{vv}{a}$. Sive $as = av + vv$. Jam cum v sit semper ut

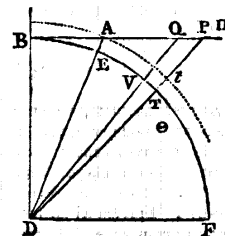
$s \times r$, et r sit semper ut $\frac{s}{v}$, erit v ut $\frac{s \times s}{v}$, sive datâ s , quod posuimus, ut $\frac{s}{v}$. Unde ponere licet

pore, & per hanc propositionem detur spatium ex datâ velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contrâ.

PROP. XIII. THEOR. X.

Posito quòd corpus, ab uniformi gravitate deorsum attractum, rectâ ascendit vel descendit; & quòd eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quòd, si circuli & hyperbolæ diametris parallele rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis à centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contrâ.

Cas. 1. Ponamus primò quòd corpus ascendit; centroque D & semidiametro quovis DB describatur circuli quadrans $BETF$, & per semidiametri DB terminum B agatur infinita BAP , semidiametro DF parallela. In eâ detur punctum A , & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars altera sit ut velocitas, & pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia tota ut AP quad. + $2BAP$. Jungan-



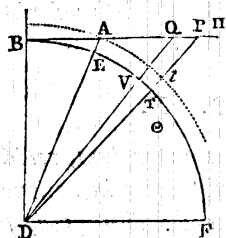
licet $\frac{v}{v} = \frac{BR}{v}$. (Geometr. Flux. Def. 5.) Quare $\frac{v}{v} = \frac{B}{v}$. $R = \frac{V}{Y} = \frac{B}{S} = \frac{T}{T}$.

Recta igitur GD corporis velocitatem, simili planè lege decrecentem, optimè repræsentabit, si dato punctorum G , a altero, alterum aptè sumatur.


Dato autem puncto G (fig. p. 308), talis sumenda est GR , quæ ad rectæ v , qualem utique initio motûs illa habuit, longitudinem rationem habeat quam co ad a . Vel dato a , talis sumenda est co quam ad GR rationem habeat quam data a ad longitudinem rectæ v , qualem utique initio motûs illa habuit. Ita semper GD velocitatis rationem servabit, modò area $SRDE$ itineris confecti rationem servet. Puta enim spatium itineris s tempore quodam r confectum; eodemque tempore aream $SRDE$ generatam, et velocitatem quæ initio fuerit v in minorem v abiisse. Dico eam esse ad GD ut v

ad v . Cum enim, datâ s , v sit ut $s + v$, spatio s æquabiliter aucto, recta $s + v$ ratione geometricâ decrescet. Quare iter confectum s logarithmus erit rationis quam $s + v$ habet ad $s + v$. At verò area hyperbolica $SRDE$ rationis quam GR habet ad co , è naturâ hyperbolæ, erit logarithmus; et area illa hyperbolica simili semper ratione cum itinere confecto crescit. Ob mutuatam igitur logarithmorum competentiam, eadem erit ratio rectæ $s + v$ ad $s + v$ quæ rectæ GR ad co , sive quæ $co + GR$ ad $co + GD$. Et permutando $s + v : co + GR = s + v : co + GD$. Est autem $s : co = v : GR$. (Id enim factum est.) Erit igitur $s + v : co + GR = s + v : co + GD$. (El. v. 12.) Et cum sit etiam $s + v : co + GR = s + v : co + GD$, erit $s : co = s + v : co + GD$. (El. v. 11.) Quare permutando $s : s + v = co : co + GD$. Invertendo et dividendo $v : s = GD : co$. Permutando $s : co = v : GD$. Sed $s : co = v : GR$. Quare $v : GR = v : GD$. Permutando $v : v = GR : GD$. Q. E. D.

tur



tur DA, DP, circulum secantes in E ac T, & exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut DAq ad APq + 2BAP (C): & tempus ascensûs totius erit ut circuli sector EDT.

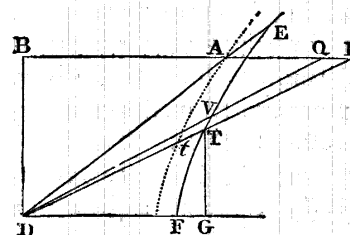

 Agatur enim DPQ , abscindens & velocitatis AP momentum PQ , & sectoris DFT momentum DTV dato temporis momento respondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut summa virium gravitatis DAQ & resistentiæ $APQ + 2BAP$, id est (per Prop. XII. Lib. II. Elem.) ut DPq quad. Proinde area DPQ , ipsi PQ proportionalis, est ut DP quad. & area DTV , quæ est ad aream DPQ ut DTq ad DPq , est ut datum DTq (d). Decreſcit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per subtractionem datarum particularum DTV , & propterea tempori aſcenſus totius proportionalis est. Q. E. D.

Caf.

(*) Hujus linearis ratio ita, ni fallor, apertius exponitur. Recta AP positione data, manente puncto A, eâ lege fluat, ut mutabilem corporis cuiusdam velocitatem referat, quod per materiam vi renixiis, qualis posita est, præditam, urgente vi uniformi gravitatis, rectâ cadat vel ascendat. Sit κ alia recta, quæ eâ lege fluat, ut renixiis materiae semper rationem servet. Detur magnitudine recta β . Quam talis ponatur lex renixiis, ut sit semper $\beta\kappa = \beta \times AP + AP^2$. In PA producti capiatur AB semper rectæ β æqualis. Unde semper erit $2AB \times \beta = 2\beta AP + AP^2$. Et rectâ AP ad modum velocitatis fluente, spatium $2\beta AP + AP^2$ ita fluat, ut renixiis semper rationem servet. Datam puta rationem quam vi renixiis ad vim constantem gravitatis habeat, quod corpus dato quodam velocitatis gradu feratur. Atque detur etiam rectæ mutabilis AP magnitudo, AI, quæ datam illam velocitatem referat. Ita dabitur spatium, quod ad datam tunc spatii fluentis $2\beta AP + AP^2$ magnitudinem, $2\beta AI + AI^2$, rationem illam datam habeat quam vi gravitatis ad vim renixiis. Sit c recta cujus quadratum huic spatio æquale est. Et cum vi renixiis spatii mutabilis $2\beta AP + AP^2$ rationem semper servet, vis constans gravitatis erit semper ad vim renixiis, ut quadratum de rectâ c datum ad mutabile $2\beta AP + AP^2$. Recta autem c vel major erit quam AB, vel minor, vel ei æqualis. Si major sit, deducatur a puncto A in rectam ad, ad perpendicularium a puncto β educam, recta ad illi c æqualis. Centro D intervallo DB scribatur circulus. Sint II, κ duo quævis loca puncti mobilis P. Junctæ OP, DP circulo in Θ , τ occurrant. Tempus ascendendi a loco illo, ubi corporis velocitas ea est quam recta AI referat, locum usque quem corpus, extinctâ sensim velocitate, summum attigerit, ad tempus ascendendi a loco alio, ubi velocitas est ea quam recta AP referit, locum usque summum, erit ut sector ΘDE ad sectorem TDE. Vel sermone Newtoniano, sector TDE erit ut tempus, quo velocitas AP ascendendo extinguitur.

(⁴) Hoc est, fluxio trianguli dPA , quæ fluxionis rectæ AP rationem servat, ea ad quadratum ex DP datam rationem geret. Sed fluxio trianguli dPA est ad fluxionem sectoris dPS ut quadratum ex DP ad quadratum ex DT . Permutando $dTE:DT^2 = dPA:DP^2$. Quare cum dPA five fluxio trianguli dPA , ad quadratum ex DP datam rationem habeat, fluxio sectoris dTE ad quadratum ex DT datam quoque rationem geret. Sed recta DT , cum rectæ ED æqualis est, magnitudine datur. Nam ad positione data. (Dat. 31.) Et ad positione data. (Dat. 29.) Quare punctum D datum. (Dat. 25.) Et S datum; quia extremum est rectæ AS , magnitudine et positione datæ, cujus alterum extremum A datur. (Dat. 27.) Recta igitur BD , & illi æqualis DT , magnitudine data est. (Dat. 26.) Quare quadratum ex DT magnitudine datum, et fluxio sectoris dTE magnitudine data est. circularis

Caf. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitu-
dinem AP ut prius, & resistentia ponatur esse ut $APq + 2BAP$, & si
vis gravitatis minor sit quam quæ per DAq exponi possit; capiatur
BD ejus longitudinis, ut sit $ABq - BDq$ gravitati proportionale (c);

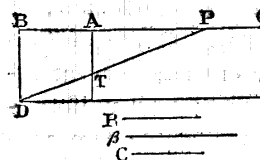


fitque DF ipsi DB perpendicularis
& æqualis, & per verticem F de-
scribatur hyperbola FTVE, cujus
semidiametri conjugatæ sint DB &
DF, quæque fecet DA in E, &
DP, DQ in T & V; & erit tem-
pus ascensûs totius ut hyperbolæ
sector TDE.

Nam velocitatis decrementum PQ , in datâ temporis particulâ factum, est ut summa resistentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id est, ut $BPq - BDq$. Est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq ; ideoque, si ad DF demittatur perpendicularum TG , ut GTq , seu $GDq - DFq$, ad BDq , utque GDq ad BPq ; & divisim ut

circularis DTE magnitudine data. Sector igitur DTE, cujus fluxio constans, æqualiter fluit.

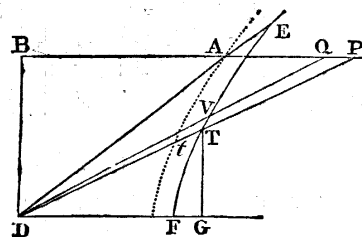
(*) JAM verò e non fit major quàm AB. Vel minor igitur erit, vel ei æqualis. Sit æqualis primò; cujus casus demonstrationem Newtonus, ad alia properans, neglexit. A puncto B ad perpendicularum educat̃a BP, capiatur ad ip̃h AB æqualis. Per A educatur ad perpendicularum recta AT, cui juncta DP in T occurrat. Dico tempus, quo consumitur ascendendo velocitas AP, esse ut triangulum BTA*; sive ut recta BA. Cùm enim vis constans gravitatis sit semper ad vim renixis ut c^2 ad $2BAF + AP^2$; idcirco, positis c, AB æqualibus, summa virium gravitatis renixisque erit ut $BA^2 + 2BAF + AP^2$,



hoc est (per El. II, 4.) ut DP^2 . Velocitatis autem fluxio, tempore æqualiter aucto, summæ virium gravitatis renixitque rationem feryabit. Quare fluxio rectæ AP erit semper ut quadratum ex DP . Vel si ad datam BD applicetur rectangulum q quadrato ex BP æquale, rectæ AP fluxio ad rectam BD rationem datam geret. Sed cum recta DP , polo D mobilis, recta AP , AT positione datas fecerit, erit $AP : AT = DP \times PA : DT \times TA$. (Introducta. Quad. Q § 8.) Sed propter parallelas AT , BD , erit $PA : PE = TA : BD$. Quare $DP \times PA : DP \times PB = DT \times TA : DT \times BD$. Permutando $DP \times PA : DT \times TA = DP \times PB : DT \times BD$. Quare $AP : AT = DP \times PB : DT \times BD$. Sed propter rectas AT , BD parallelas, erit $DP : PE = DT : BA$, vel BD . Rectangula igitur $DP \times PB$, $DT \times BD$ inter se similia erunt, et quadratorum AP lateribus PB , BD inter se rationem gerent. Hoc est $DP \times PB : DT \times BD = PB^2 : BD^2 = QB : BP$. Quare $AP : AT = QB : BD$. Permutando $AP : QB = AT : BD$. Sed ratio illius AP ad QB data est. Quare et illius AT ad datam BD data. Quapropter AT data erit magnitudine. Et recta AT , cujus constans est fluxio, nimirum si tempus æqualiter augeatur, æqualiter ad modum temporis ipsa fluat. Q. E. D.

At verò si c minor sit quam AB , capiatur BD ejus longitudinis, ut quadratum ex BD illud sit, quo quadratum ex AB exsuperat quadratum ex c . Ita fiet $AB^2 - BD^2 = c^2$; et vis gravitatis semper erit ad vim renixit ut $AB^2 - BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$.

* In oppositâ figurâ artifex rectam DA celare neglexit. Ut in figurâ casus superioris, p. 312, rectam DΘΠ.



Caf. 3. Sit AP velocitas in descensu corporis, & APq + 2BAP resistentia, & BDq - ABq vis gravitatis (f), existente angulo DBA recto. Et si centro D, vertice principali B, describatur hyperbola rectangula BETV secans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus sector DET ut tempus totum descensus.

Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut BDq - ABq - 2BAP - APq, seu BDq - BPq. Et area DTV est ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut GTq, seu GDq - BDq, ad BPq, utque GDq ad BDq, & divisim ut BDq ad BDq - BPq. Quare cum area DPQ ut sit BDq - BPq, erit area DTV ut datum BDq. Crescit igitur area EDT uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea temporis descensus proportionalis est. Q. E. D.

Corol. Si centro C, semidiametro DA, per verticem A ducatur arcus AT similis arcui ET, & similiter subtendens angulum ADT: velocitas AP erit ad velocitatem, quam corpus tempore EDT, in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli DAP ad aream sectoris DAT; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in medio non resistente, temporis, atque ideo sectori huic proportionalis est; in medio resistente est ut triangulum; & in medio utroque, ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

Scholium.

(f) Si corpus recta cadat, recta c ut prius inventa, in recta BD à puncto B ad perpendiculum educta

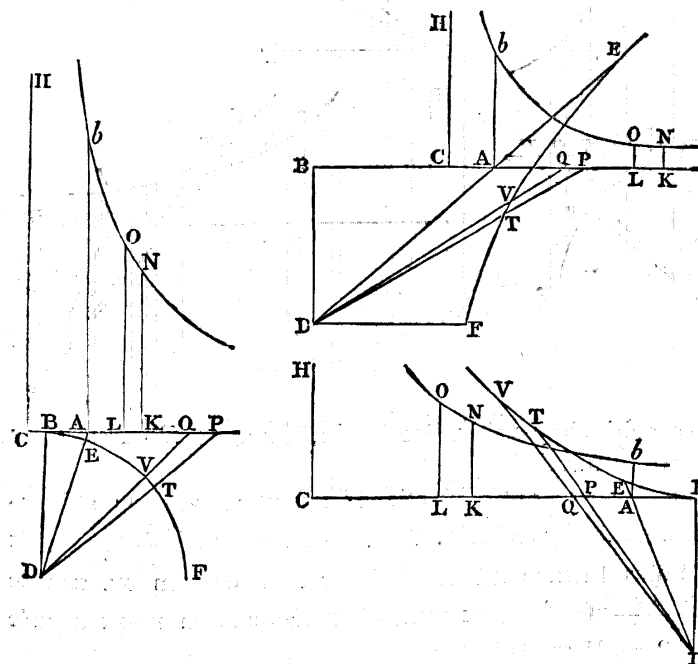
Scholium.

Demonstrari etiam posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis minor est quàm quæ exponi possit per DAq seu ABq + BDq, & major quàm quæ exponi possit per ABq - BDq, & exponi debet per ABq (g). Sed propro ad alia.

PROP. XIV. THEOR. XI.

Iisdem positis, dico quodd spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areae per quam tempus exponitur, & area cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressionem Arithmetica, si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressionem Geometrica.

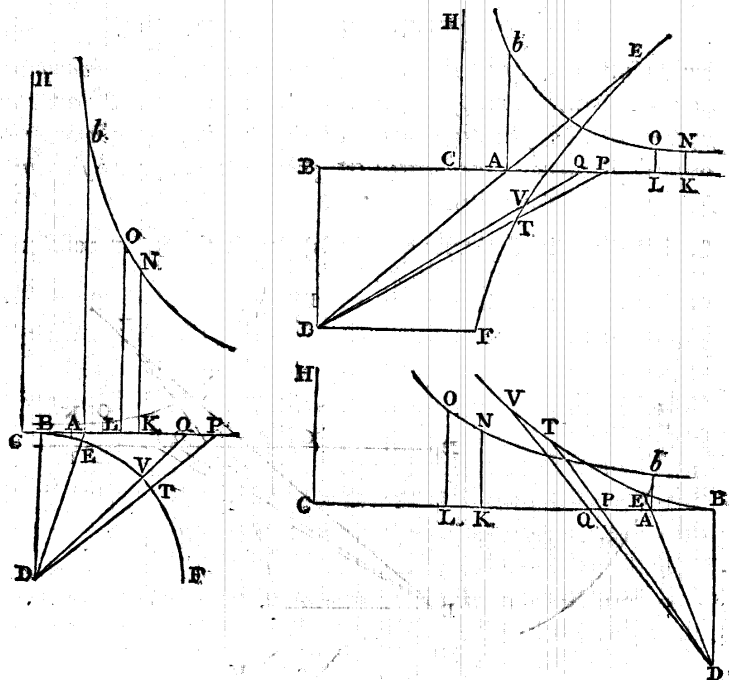
Capiatur AC (in fig. tribus ultimis) gravitati, & AK resistentiæ



proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A, si educta capiatur BD, cujus quadratum quadratis ex AB et ex c simul sumptis æquale sit.
(g) Vide Not. *

DE MOTU
CORPORUM

corpus descendit; aliter ad contrarias. Erigatur Ab , quæ sit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & descripta ad asymptotos rectangulas, CK , CH hyperbolâ bN , erectaque KN ad CK perpendiculari, area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressionem Arithmeticâ, dum vires CK in progressionem Geometricâ fumuntur. Dico igitur quod dif-



tantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET .

Nam cum AK sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z , & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma II.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ \times BD \text{ cub.}}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq + BDq$, existente BET Circulo (in figurâ primâ) linea AC , quæ gravitati proportionalis.

proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$; & DPq , seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$, erit $AK \times Z + AC \times C$, seu $CK \times Z$; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$, linea AC (in figurâ secundâ) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$; & DTq erit ad DPq ut DFq , seu DBq , ad $BPq - BDq$, seu $APq + 2BAP + ABq - BDq$; id est, ad $AK \times Z + AC \times Z$, seu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut $BDq - ABq$, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$, erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut suprà.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hac ratione; si pro areâ DTV , quâ momentum temporis fibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ , id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$, ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq . Atque inde fit $PQ \times BD \text{ cub.}$ æquale $2BD \times m \times CK \times Z$; & areæ $AbNK$ momentum, $KLON$, superius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{BA}$. Auferatur areæ DET momentum DTV , seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentie arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea, ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$, ut velocitas AP , id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud, proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. Q. E. D.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream DET ad lineam BD , dicatur M ; & longitudo alia v fumatur in eâ ratione ad longitudinem M , quam habet linea DA ad lineam DE : spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium, quod corpus in medio non resistente, è quiete cadendo, eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times v^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis, sive ut v^2 ; & ob datas BD & AB , ut $\frac{BD \times v^2}{AB}$. Hæc area æqualis.

qualis est areæ $\frac{DA\eta \times BD \times M^2}{DE\eta \times AB}$, & ipsius M momentum est m ; & propterea hujus areæ momentum est $\frac{DA\eta \times BD \times 2M \times m}{DE\eta \times AB}$. Hoc autem momentum est ad momentum differentię arearum prædictarum DET & AONK, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DA\eta \times BD \times M}{DE\eta}$ ad $\frac{1}{2}BD \times AP$, five ut $\frac{DA\eta}{DE\eta}$ in DET ad DAP; ideoque, ubi areæ DET & DAP quàm minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & AONK, quando omnes hæ areæ quàm minimæ sunt, æqualia habent momenta; ideoque sunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam spatia, in medio utroque in principio descensûs vel fine ascensûs simul descripta accedant ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & AONK differentia; & præterea cum spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuò ut arearum DET & AONK differentia: necesse est, ut spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque temporibus descripta, sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & AONK differentia. Q. E. D.

Scholium.

Resistentia corporum sphaericorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex fricção, & partim ex densitate Medii. Et resistentiæ partem illam, quæ oritur ex densitate fluidi diximus esse in duplicatâ ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, est uniformis, five ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim vi uniformi, seu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed sufficit aditum patefuisse ad hanc speculationem in Propositionibus VIII & IX. quæ præcedunt, & eorum Corollariis. In iisdem utique pro corporis ascendenti resistentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, substitui potest resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus solâ vi inritâ movetur; & corpore rectâ ascendente addere licet hanc uniformem resistentiam vi gravitatis; eandemque

(²) Nimirum TQ est ad PD ut TS ad PE, propter tres rectas, PT, DQ, ES, inter se parallelas. Evanescente

que subducere, quando corpus rectâ descendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in Propositionibus præcedentibus XIII & XIV. in quibus etiam resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis substitui potest, vel cum eadem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis resistentibus.

LEMMA III.

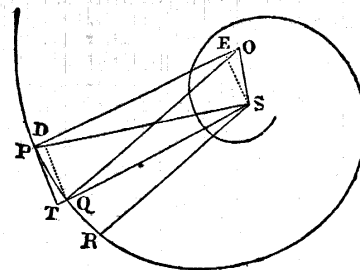
Sit PQR Spiralis, quæ secet radios omnes SP, SQ, SR, &c. in æqualibus angulis. Agatur recta PT, quæ tangat eandem in puncto quovis P, secetque radium SQ in T; & ad Spiralem erectis perpendicularis PO, QO concurrentibus in O, jungatur SO. Dico, quòd si puncta P & Q accedant ad invicem & coeant, angulus PSO evadet rectus, & ultima ratio rectanguli TQ × 2PS ad PQ quad. erit ratio æqualitatis.

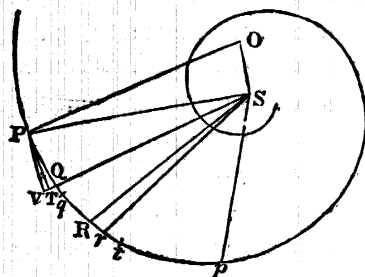
Etenim de angulis rectis OPQ, OQR subducantur anguli æquales SPQ, SQR, & manebunt anguli æquales OPS, OQS. Ergo circulus, qui transit per puncta O, S, P, transibit etiam per punctum Q. Coeant puncta P & Q, & hic circulus, in loco coitûs PQ, tanget Spiralem, ideoque perpendiculariter secabit rectam OP. Fiet igitur OP diameter circuli hujus, & angulus OSP in semicirculo rectus. Q. E. D.

Ad OP demittantur perpendiculara QD, SE, & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: TQ ad PD ut TS, vel PS, ad PE, seu 2PO ad 2PS; item PD ad PQ ut PQ ad 2PO (¹); & ex æquo perturbatè TQ ad PQ ut PQ ad 2PS. Unde fit PQQ æquale TQ × 2PS. Q. E. D.

PROP.

Evanescente autem angulo PST, recta TS fit rectæ PS ultimò æqualis. Erit igitur TQ ad PD ultimò





resistentia; id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$ (e). Detur Spiralis (f), & ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia à centro SP, corpus gyrari potest in hac Spirali. Q. E. D.

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est, quâcum corpus, in medio non resistente, eadem vi centripetâ gyrari potest in Circulo, ad eandem à centro distantiam SP (g).

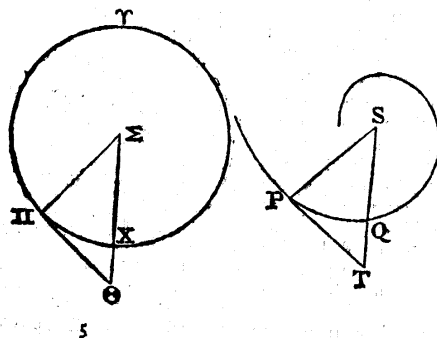
Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{OS}{OP}$, si distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet

Medii

ter æquales SP, SV. Et propter angulum ad V rectum, angulumque POV, è Spirarum naturâ, datum; figura POV, quæ arcu spirarum PQ, circulari PV, rectâque VQ est conclusa, arcibus illis PQ, PV, evanescentibus, trianguli cujusdam rectilinearis rectanguli speciem ultimò induet. Dico ipsi POS figuram POV fieri ultimò similem. Nam cum rectus sit angulus OPQ, angulus SPQ illius ORS complementum erit. Verùm ejusdem ORS ille SOP complementum. Angulus igitur SOP angulo SPQ æqualis. Sed eidem SPQ ille POV è Spirarum naturâ æqualis. Anguli igitur SOP, POV inter se æquales. Triangula igitur POS, POV, quæ angulos ad S, V rectos, acutosque ad O, Q æquales habent, ea omnino inter se similia erunt.

(e) Litera D significetur recta quædam, eâ lege mutabilis ut densitatis semper rationem gerat. Erit igitur $\frac{D}{SP}$ ut reniculus, id est, ut $\frac{OS}{OP \times SP^2}$. Quare D, five densitas, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(f) Hoc est, detur angulus ad spiram SPQ.



(g) Puta vires quasdam centrum Z, inani constitutum, respicere; tales quæ viribus centrum S, in spatio impedito constitutum, respicientibus, in æqualibus à centro distantis æquales sint. Circum centrum Z, radio ZH, cuilibet è Spirarum radiis SP æquali, scribatur circulus PXY. Dico corporis in spatio impedito per Spiras lati, in loco P, velocitatem velocitati illi æquabilis esse æqualem, quâcum corpus in inani circum centrum Z per circulum PXY ferretur. Sint enim PQ, PX arcus, illæ Spirarum, hic Circuli, eodem tempore confecti; junctæque SQ, SX rectis PT, LX, quæ Curvas in punctis P, X contin-

Medii densitatem aptari potest (h).

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad OP. Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}RR$ & TQ; five ut $\frac{1}{2}VQ \times PQ$ & $\frac{1}{2}PQ \times Q$; hoc est, ut $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, seu $\frac{1}{2}OS$ & OP. Datâ igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam; & vice versa ex datâ illâ proportionem datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac Spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quàm dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, & Spiralis conveniet cum lineâ rectâ PS; inque hac rectâ corpus descendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, quâ probavimus in superioribus in casu Parabolæ (Theor. x. Lib. i.) descensum in medio non resistente fieri, in subduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium (i). Et tempora descensus hîc erunt reciproce ut velocitates, atque ideo dantur (k).

Corol.

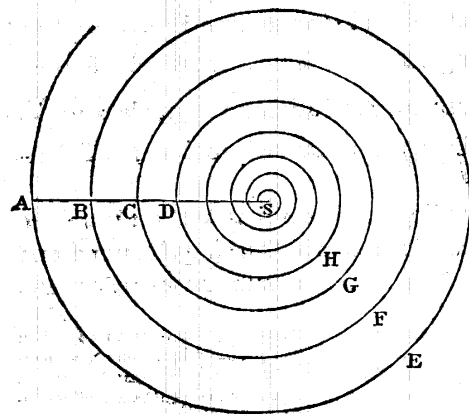
gunt, in punctis r, o occurrant. Jam cum illa rQ, arcu PQ primò nascente, à mudâ vi centripetâ proveniret, quòd modò probavimus (Not. c) nascentes primò rQ, oX, cum ab æqualibus viribus centripetis eodem tempore oriundæ sint, erunt inter se æquales. Quare propter SP, SH inter se æquales, rectangula nascentia SP × rQ, SH × oX, primò quidem inter se æqualia erunt. At verò rectangulo nascenti SP × rQ quadratum ex nascente rQ primò est æquale. (Probatur à Lemmate III.) Rectangulo item nascenti SH × oX quadratum è nascente primò SX. (Probatur à circulo.) Quadrata igitur è nascentibus rQ, SX erunt primò inter se æqualia. Quare et nascentes rQ, SX primò inter se æquales. Velocitates autem corporum, à locis P, H egredientium, eam inter se rationem habent, quæ arcuum nascentium rQ, SX inter ipsos prima est. Velocitates igitur in locis illis erunt inter se æquales. Q. E. D.

(h) Nimirum si dentur Spiræ PQ (fig. tent. p. 324) per quas corpus feratur, per materiam, datâ quâdam densitate, in datâ à centro S distantia SP, præditam, dabuntur spiræ aliæ PX (in figurâ appositâ) per quas corpus feretur, cui cum materiâ circumfusâ lactandum sit, quæ in aliâ à centro S distantia datâ SH, aliam datam densitatem habeat.

Spirarum PQ sit radius SP radio SH spirarum PX æqualis. A puncto Heductam puta rectam HN, quæ Curvam PX ad perpendicularum infistat, rectæque HN, à puncto S ad perpendicularum cum radio SHeductæ, in N occurrat. Densitates in locis P, H significentur literis D, Δ. Densitas in loco P literâ d. Erit P: d = SP: SP. Quare datis SP, SP, datæque etiam densitate D, densitas d dabitur. Sed d: Δ = OS × SH: SZ × OP. Datarum autem d, Δ ratio data. Rectangulorum igitur OS × SH, SZ × OP ratio data. Latera autem OS, OP magnitudine data. Quare mutua eorum ratio data. (Dat. 1.) Quare et reliquorum laterum SH, SZ ratio data. (Dat. 68.) Triangulum igitur SHN, cujus angulus ad S rectus, specie datum. (Dat. 43.) Angulus igitur SHN datus. Sed angulo SHN angulus SXN, radio SH Curvæque interclusus, æqualis est: Angulus igitur spirarum datus. Spiræ igitur specie datæ. Dato igitur centro Z, radioque SH magnitudine et positione dato, Spiræ, cum specie datæ sint, positione etiam dabuntur. Q. E. D.

(i) Per Cor. 1. & Lib. I. Prop. IV. Cor. 6.

(k) CORPORA duo rectâ cadant; alterum per inane versus centrum Z, alterum versus centrum s per



gulo secuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciproce in subduplicatâ ratione distantiarum à centro (id est, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras confimiles revolutiones BFC, CGD, &c. facere, & intersectionibus

(^o) Ut corpus viribus centripetis incitatum, quæ duplicatæ distantiarum rationi contrariè respondeant, per spiras aliquas feratur ex æquiangularibus; non modò illud necesse est, ut materiæ circumfusæ densitas rationem distantie à centro contrariam fervet, sed etiam ut corpus ex dato loco cum certâ velocitate projiciatur, & secundum rectam certo quodam angulo ad radium inclinatum: nempe cum velocitate eâ, quâcum in inani, urgentibus iisdem viribus centripetis, per circulum ferretur ad eandem à centro distantiam (per Cor. 1.); eâ autem ad radium inclinatione, cujus cosinus rationem ad radium habeat, quam dupla vis renixis ad vim centripetam (per Cor. 3.) Quòd si vel aliâ eum velocitate, vel secundum rectam aliter ad radium inclinatum, corpus projectum fuerit, fieri nullo modo potest, ut per spiras aliquas ex æquiangularium genere cursum teneat. At verò per Curvam aliquam. Quenam illa erit? Difficillimam hanc quæstionem ne omninò intactam videretur reliquisse, Newtonus, ut opinor, septimum hoc collarium posuit. Nempe fieri potest, ut corpus aliter à loco A projectum, quam quo motus per spiras logísticas præstari possit, Curvam quandam circa centrum s scribat, cujus, liceat haud prorsus æquiangularis sit, data tamen quædam ad radium inclinatio certis locis redeat. Si igitur talis sit, cujus, cum semel centrum cinxerit, eadem ad radium SA inclinatio redeat, quam in loco A habuit; hoc est si radium SA eadem inclinatione in locis duobus A, B secuerit, si præterea velocitates in locis A, B, subduplicatam radiorum SA, SB rationem contrariè gerant: dicit Newtonus Curvam illam centrum s gyris innumeris cingere, qui omnes ad radium AS similiter inclinati erunt, et radium illum in partes innumeras dividunt, geometricâ ratione inde ab initio decrecentes. Tempora verò, quibus corpus per hanc Curvam latum orbis singulos AEB, BFC, CGD ordine confecerit, rationem habere à ratione longitudinum ipsorum orbium cum ratione velocitatum in locis A, B, compositam; sive eam, quæ cuborum è radiis AS, BS, CS subduplicata erit. Quorum omnium hæc erit demonstratio.

Perpetua si sit inter rectas SA, SB, SC, SD proportionis convenientia, erunt aliquæ ex spiris æquiangularibus, quæ, si polus eorum ipsi s superimpositus esset, radius autem ipsi SA æqualis in ipsum radium SA, radios suos alios, qui illis SB, SC, SD æquales essent cum ipsis SB, SC, SD congruentes haberent; et inter puncta quæque proxima, A, B; B, C; C, D; simplici semper orbe polum s cingerent. Jam verò vires centripetæ acceleratrices, quibus corpus per Curvam AEB incedens in locis A, B urgetur, eadem sunt, quæ corpus per spiras illas latum in eisdem locis urgerent. Velocitates item corporis per Curvam AEB incedentis quas in locis A, B, habet, eum eandem inter se rationem gerant, quam velocitates corporis quod per spiras ferretur, quas in eisdem locis utique id haberet: permutando, velocitas in Curvâ AEB in loco A, ad velocitatem in loco A in spiris, ut velocitas in Curvâ AEB in loco B ad velocitatem in loco B in spiris. Densitates etiam materiæ in locis A, B eadem, sive corpus per Curvam AEB, sive per spiras incedat. Denique cum tam spirarum quam Curvæ eadem sint in locis A, B, ad radium communem SA inclinationes, eadem scilicet in utroque loco Curvæ ad spiras inclinatio erit. Motus igitur corporis è loco s egredientis,

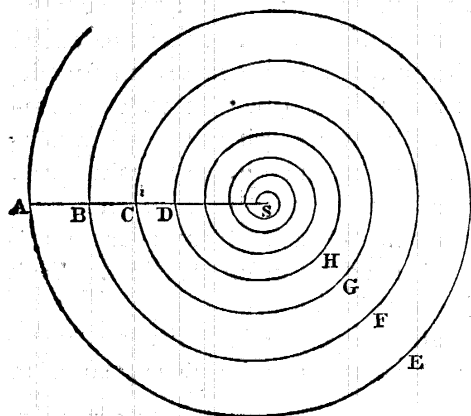
bus distinguet radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inversè; id est, ut $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$ (ⁿ). Atque tempus totum, quò corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{1}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{1}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{1}{2}} - BS^{\frac{1}{2}}$ (^o), sive ut $\frac{2}{3} AS$ ad AB quàm proximè. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam

dentis, ad motum corporis, cui ex eodem loco egredienti secundus spirarum orbis scribendus esset, eodem planè modo se habet, quo motus corporis è loco A egredientis ad motum corporis se habuit, cui, cum ex eodem loco egrederetur, per primum spirarum orbem eundem esset. Vires etiam illæ omnes, quibus corpori è loco A egredienti obtemperandum est, ad vires illas, quæ motum per secundum spirarum orbem præstarent, eodem modo se habent, quo vires, quibus corpori è loco A egredienti obtemperandum erat, ad vires quæ motum per spirarum orbem primum præstarent. Fieri igitur nequit, cum in rerum naturâ nihil sine ratione fiat, quin corpus è loco A egressum per Curvam quandam feratur, cui cum orbe spirarum secundo eadem planè cognatio intercedat, quæ Curvæ AEB cum orbe illarum primo. Unde etiam Curva illa sive cum secundo spirarum orbe in loco c iterum conturret, et tam radium communem se quàm spiras eisdem angulis in c, quibus in B vel A, secabit. Et similibus planè argumentis efficietur corpus è loco c egressum per tertium quandam orbem ferri, cui cum orbe spirarum tertio eadem cognatio intercedat, quæ orbibus AEB, BFC cum spirarum orbibus primo et secundo: et è loco c egressum corpus per orbem quartum CGD feretur cum orbe spirarum quarto similiter cognatum. In summa, Curva, per quam corpus feretur, centrum s orbibus innumeris cinget; qui spirarum orbibus innumeris in punctis A, B, C, D ordine occurrentes, radium primum SA, in innumeros SA, SB, SC, SD ratione geometricâ decrecentes necessario dividunt. Et cum innumeri illi hujus Curvæ orbes spirarum innumeris similibus inclinatione singulatis fecerint, ad radium etiam illi omnes in intersectionum punctis similiter inclinati erunt.

Præterea ex simili orbium omnium Curvæ ad spirarum orbes, si ordine conferantur, cognationes, sequitur orbibus Curvæ, primo, secundo tertio, innumerisque deinceps aliis, easdem planè inter ipsos rationes intercedere, quæ spirarum orbibus primo, secundo, tertio innumerisque deinceps aliis: quin et tempora, quibus Curvæ orbes conficiuntur, temporum, quibus spirarum orbes conficiendi essent, rationem inter se servare. Nam cum ex orbibus, Curvæ spirarumque, seu cognatione sui diversitate omnis temporum seu cognatio seu diversitas proveniat, ex simili orbium cognatione similes planè temporum seu cognationes seu diversitates venerint. Tempus igitur quo conficitur orbis AEB erit ad tempus quo conficitur orbis BFC, ut tempus quo primus spirarum orbis ad tempus quo secundus conficiendus esset. Sed tempus quo primus conficeretur spirarum orbis ad tempus quo secundus rationem habet à ratione longitudinis orbis primi ad longitudinem orbis secundi, cum contrariâ velocitatum in locis A, B ratione compositum. Nimirum cum orbes inter se sunt similes, dataque sit velocitatum ratio, quibus similibus illorum orbium partes omnes similes conficiendæ essent. Sed longitudines orbium, propter similitudinem eorum inter se, sunt ut radii SA, SB. Et velocitatum contraria ratio radiorum SA, SB subduplicata erit. Quare ratio ex hisce composita cuborum è radiis SA, SB est subduplicata. Tempus igitur quo primus spirarum orbis conficeretur ad tempus quo secundus, ac proinde tempus quo conficitur orbis AEB, ad tempus quo orbis alter BFC, rationem habet quàm $SA^{\frac{1}{2}}$ ad $SB^{\frac{1}{2}}$. Q. E. D. Horum demonstrationem ex eisdem principiis accesserunt doctissimi Patres Le Saur & Jacquier.

(^o) Vide Anal. per Æquat. Infinit. Not. *



ut medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proximè: sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli, quo Spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium AS , ad secantem anguli quo Spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: atque etiam ut sunt eorundem angulorum tangentes, ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proximè. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus, quibus modis ac temporibus corpora, in medio quocunque regulari, gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descriptâ, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spiralibus peragantur.

P R O P.

(*) NEMINUM ex eo quod tempus quo conficitur arcus PQ fit ultimò ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}}$, sequitur velocitatem in loco P esse ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}}}$. Arcus autem evanescentes PQ , QR eam ultimam inter se ratio-

nem habent, quam velocitates in punctis P , Q . Hoc est $PQ:QR$ ultimò = $SP^{\frac{1}{2}}:SQ^{\frac{1}{2}}$. Coeuntibus autem punctis P , Q , ut illa SP , vel SV , ultimò æquales fiant; erit $SP^{\frac{1}{2}}$ ad $SP^{\frac{1}{2}}$ ultimò ut SP ad SP . Unde $PQ:QR$ ultimò = SP ad SP . Rursum cum æquales sint areæ SPQ , QSR , angulique SPQ , QSR inter se æquales; cum præterea areæ illæ evanescentes triangularum rectilinearium rationem inter se ultimò assequant: idcirco PQ erit ad QR ultimò ut SP ad SP . (El. vi. 15.) Cum igitur fit PQ ad QR ultimò ut SP ad SP , et PQ ad QR ultimò ut SP ad SP

quamcunque legem assignatam observat. Centro s , intervallis continuè proportionalibus SA , SB , SC , &c. describe circulos quoscunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito,

P R O P. XVI. T H E O R. XIII.

LIBER
SECUNDUS.

Si medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantie: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantie, SP , dignitas quælibet, SP^{n+1} , cujus index est $n+1$: colligetur ut supra, quod tempus, quo corpus describit arcum quemvis PQ , erit ut $PQ \times SP^{\frac{n}{2}}$; & resistentia in P ut $\frac{Rr}{PQ \times SP^{\frac{n}{2}}}$, five ut $\frac{1-\frac{1}{2}n \times VQ}{PQ \times SP^{\frac{n}{2}} \times SQ}$ (P), ideoque ut $\frac{1-\frac{1}{2}n \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$; hoc est, ob datum $\frac{1-\frac{1}{2}n \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1} . Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}}$, densitas in P erit reciproce ut SP .

Corol. 1. Resistentia est ad vim centripetam ut $1-\frac{1}{2}n \times OS$ ad OP (1).

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciproce ut SP cub. erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in Propositione nonâ Libri Primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur (1).

ad SP vel $SP+VQ$: erit (per El. v. 24) PQ ad QR ultimò ut SP ad $SP+VQ$. Unde SP = $1-\frac{1}{2}n \times VQ \times PQ$. Jam verò id quo arcus PQ propter renixum brevior redditur, five ejus duplum, $2PQ$, rationem servabit à ratione vis renixus cum duplicatâ temporis compositam. Quare vis renixus erit ut $\frac{Rr}{PQ \times SP^{\frac{n}{2}}}$; hoc est, pro $2PQ$ æquali ejus substituto, ut $\frac{1-\frac{1}{2}n \times VQ}{PQ \times SP^{\frac{n}{2}}}$; id est, propter SP , SP ultimò inter se æquales ut $\frac{1-\frac{1}{2}n \times VQ}{PQ \times SP^{\frac{n}{2}}}$.

(1) Id enim eodem modo ostendatur quo Corollarium tertium Propositionis præcedentis.

(2) Fieri igitur nequit, ut corpus per materiam renitentem in spirali æquiangulari iter faciat, si vires centripetæ potestatis alicujus distantiarum, quæ cubicâ elatior sit, contrariam rationem gerant.

T t 2

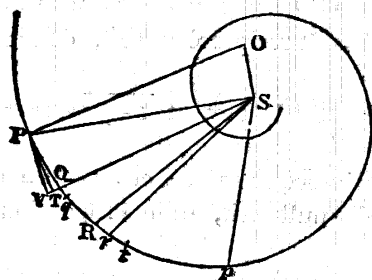
Scolium.

Scolium.

Cæterum hæc Propositio & superiores, quæ ad Media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quàm ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque, cæteris paribus, densitati proportionalem esse suppono. Unde in Mediis, quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

PROP. XVII. PROB. IV.

Invenire vim centripetam & medii resistentiam, quæ corpus in datâ Spirali, datâ velocitatis lege, revolvit potest.



Sit Spiralis illa PQR. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum PQ, dabitur tempus; & ex altitudine TQ, quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum, PSQ & QSR, differentiâ RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac densitas medii.

PROP. XVIII. PROB. V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quæ corpus datam Spiralem describet.

Ex vi centripetâ invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ut in Propositione superiore.

Methodum verò tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione

positione decimâ, & lemmate secundo; & lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentiâ Mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

SECTIO V.

De densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostaticâ.

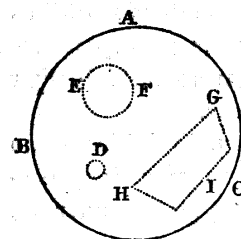
Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter se.

PROP. XIX. THEOR. XIV.

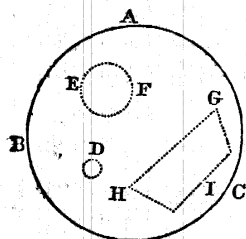
Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (sepositâ condensationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & sine omni motu à pressione illâ orto permanent in locis suis.

Cas. I. In vase sphærico, ABC, claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico, quod ejusdem pars nulla ex illâ pressione movebitur. Nam si pars aliqua D moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes, ad eandem à centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atque hoc ideo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui à pressione illâ oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra hypothesin. Non possunt longius ob eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra hypothesin. Non possunt servatâ suâ à centro distantia moveri in



plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. O. E. D.

Caf. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim EF pars sphærica fluidi; & si hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preffio minor, ufque dum ipfa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per cafum primum, permanebunt in locis fuis. Sed ante auctam preffionem permanebunt in locis fuis, per cafum eundem primum, & additione preffionis novæ movebuntur de locis fuis, per definitionem



fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur, quòd sphaera
EF non untique premebatur æqualiter. Q. E. D.

Caf. 3. Dico præterea, quod diverfarum partium ſphæricarum æqualis fit preffio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactûs, per motûs Legem III. Sed &, per caſum ſecundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eâdem vi. Q. E. D.

Caf. 4. Dico jam, quòd fluidi partes omnes undique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poffunt à partibus fphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas fphæricas æqualiter premunt, per Cafum 3, & viciffim ab illis æqualiter premuntur, per motûs legem tertiam. Q. E. D.

Caf. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet, GH , in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuò æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est, quòd fluidi cujuscunque, GH , quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuò premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

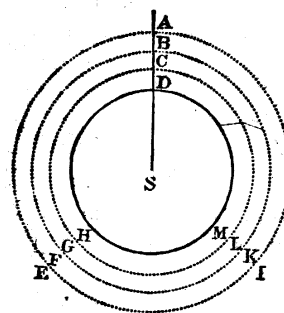
Caf. 6. Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedit idem pressioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

Caf. 7. Ideoque in vase rigido fluidum non sustinebit pressio-
nem fortio-LIBER
rem ex uno latere quàm ex alio, sed eidem cedit, id-SECUNDUS.
que in momento temporis, quia latus vasis rigidum non perfe-
quitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppo-
situm, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoni-
am fluidum, quàm primùm à parte magis pressa recedere conat-
ur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; reduce-
tur pressio undique ad æqualitatem, in momento temporis, sine
motu locali: & subinde partes fluidi, per casum quintum, se mu-
tuò prement æqualiter, & quiescent inter se. Q. E. D.

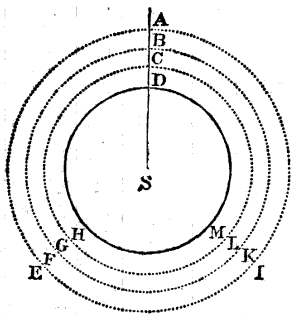
Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externâ superficie illatam, mutari possunt; nisi quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes, intensius vel remissius sese premendo, difficilius vel facilius labuntur inter se.

P R O P. XX. T H E O R. XV.

Si fluidi sphaerici, & in aequalibus à centro distantis homogenei, fundo sphaerico concentrico incumbentis, partes singulae versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus cylindri, cujus basis aequalis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.



The diagram shows four concentric circles with a common center labeled 'S'. A vertical line segment passes through the center, with points labeled A, B, C, and D from top to bottom. The outermost circle has points E, F, G, H on its left side and I, K, L, M on its right side. The circles represent fluid layers, with the outermost being the surface of the fluid.



pressionem duplam. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione triplâ, urgetur superficies tertia CGL. Et similiter pressione quadruplâ urgetur superficies quarta, quintuplâ quinta, & sic deinceps. Pressio igitur, quâ superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis

infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati Solidi, cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modò orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis à superficie infimâ ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. Q. E. D. Et simili argumentatione patet propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quâvis assignatâ distantiae à centro, ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet, quæ in propositione describitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem à centro distantis eadem semper est pressionis quantitas, sive superficies pressa sit horizonti parallela, vel perpendicularis, vel obliqua; sive fluidum, à superficie pressa sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit obliquè per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maximè irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

Corol. 3. Eadem demonstratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quòd fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modò excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc Fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquirat motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est, manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est, manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido liberè innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet internam rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquefceret, & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet, vel descenderet, vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet, vel descenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus, cæteræque motuum causæ, permanent. Atqui (per Cas. 5. Prop. XIX.) jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. Proinde corpus, quod specificè gravius est quàm Fluidum sibi contiguum, subsidebit; & quod specificè levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsûs, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutrâ Libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in Fluidis constitutorum duplex est Gravitatis: altera Vera & Absoluta, altera Apparens, Vulgaris & Comparativa. Gravitatis Absoluta est vis tota, quâ corpus deorsum tendit: Relativa & Vulgaris est excessus gravitatis, quo corpus magis tendit deorsum quàm fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum, & corporum omnium, gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis; id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impediunt permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in Aere sunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant

gravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non sustententur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quam excessus verorum ponderum supra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparativè levia sunt, non verè, quia descendunt in vacuo. Sic & in Aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparativè & apparenter gravia vel levia; & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus, quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ, vel ab eâ superatur. Quæ verò nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in sensu vulgi non gravitant in aquâ. Nam similis est horum casuum demonstratio.

Corol. 7. Quæ de Gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius; differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

Corol. 9. Cum autem Fluida, premendo corpora inclusa, non mutant eorum figuras externas, patet insuper (per Corollarium Prop. XIX.) quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si Animalia immergantur, & sensatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora à compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum Systematis Fluido comprimente circumdati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent Gravitationem suam Comparativam; nisi quatenus Fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressionem conglutinandas requiratur.

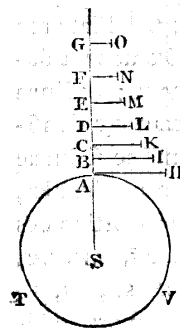
P R O P.

P R O P. XXI. T H E O R. XVI.

LIBER
SECUNDUS.

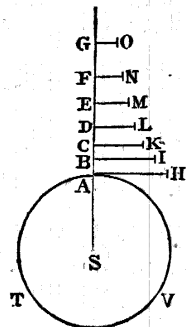
Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ distantis suis à centro reciproce proportionali deorsum trabantur: dico quod, si distantie illæ sumantur continuè proportionales, densitates Fluidi in iisdem distantis erunt etiam continuè proportionales.

Designet ATV fundum sphericum cui Fluidum incumbit; s centrum; SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. distantias continuè proportionales. Erigantur perpendiculara AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ sint ut densitates Medii in locis A, B, C, D, E, F; & specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}, \frac{BI}{BS}, \frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}, \frac{BI}{BC}, \frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis



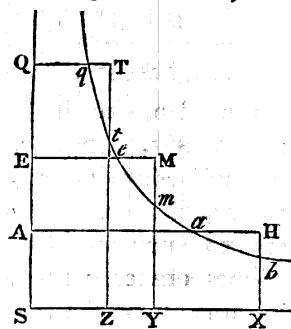
per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD, &c. facient pressiones AH, BI, CK, &c. quibus fundum ATV (juxta Theorema XV.) urgetur. Sustinet ergo particula A pressiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B pressiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & sic deinceps: ideoque particula primæ A densitas AH est ad particula secundæ B densitatem BI ut summa omnium AH + BI + CK + DL, in infinitum, ad summam omnium BI + CK + DL, &c. Et BI densitas secundæ B est ad CK densitatem tertiæ C, ut summa omnium BI + CK + DL, &c. ad summam omnium CK + DL, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (per hujus Lem. I.) proindeque differentiæ AH, BI, CK, &c. summis proportionales, sunt etiam continuè proportionales. Quare cum densitates in locis A, B, C, &c. sint ut AH, BI, CH, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per saltum, & ex æquo in distantis SA, SC, SE continuè proportionalibus, erunt densitates AH, CK, EM continuè proportionales.

U u 2



tionales. Et eodem argumento, in distantis quibusvis continuè proportionalibus, SA, SD, SG, densitates, AH, DL, GO, erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, D, E, &c. è ut progressio gravitatum specificarum à fundo A ad summam Fluidi continua reddatur; & in distantis quibusvis continuè proportionalibus, SA, SD, SG, densitates, AH, DL, GO, semper existentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc si detur densitas Fluidi in duobus locis, puta A & E, colligi potest ejus densitas in alio quovis loco



The diagram shows a coordinate system with origin S. The horizontal axis is SX and the vertical axis is SQ. A hyperbola with center S and asymptotes SQ and SX is shown. A curve, which is a hyperbola with center at the intersection of the asymptotes, passes through points T, E, M, A, H, and B. The points are labeled as follows: S is the origin; Q is on the vertical axis; X is on the horizontal axis; T is on the vertical axis; E is on the vertical axis; M is on the horizontal axis; A is on the vertical axis; H is on the horizontal axis; B is on the horizontal axis. The curve passes through T, E, M, A, H, and B. The areas of the rectangles formed by the ordinates and the asymptotes are labeled: EEQ, EEA, xbm, xbm, etc. The areas of the regions bounded by the curve and the asymptotes are labeled: ymtz, xbm, etc.

(*) Hujus constructionis in eo posita est ratio, quod ad omnes à centro distantias logarithmi rationum inter densitates cum rationum inter ipsas distantias logarithmismi ratione convenient. Inter distantias enim quasvis datas sa, se (in fig. Sup.) capiuntur quot libuerit continuâ proportionē mediæ sb, sc, sd . Erunt igitur densitates bt, ck, dl , inter densitates ah, em , continuâ proportionē mediæ. Logarithmi rationum, quæ distantias sa, sb , densitatibus ah, la intercedunt, significantur literis l, A . Quot verò sumptæ fuerint distantie sb, sc, sd , inter duas sa, se , continuâ proportionē mediæ, tot sint in numero $m - 1$ unitates. Erit igitur ml logarithmus rationis quæ distantiam sa, se intercedit. Cum verò inter densitates ah, em tot sint aliæ bt, ck, dl continuâ proportionē mediæ, quot inter distantias sa, se distantie; idcirco tot erunt densitates bt, ck, dl inter eas, quæ densitatibus ah, em intercedit, erit logarithmus. Jam verò $ml : ma = l : A$. Logarithmus igitur rationis inter distantias sa, sb , ad logarithmum rationis inter densitates ah, bt eandem rationem habet, quam logarithmus inter rationis distantias sa, se ad logarithmum rationis inter densitates ah, em . Nec huic rationi officiet distantiarum, quæ inter datas sa, se , mediæ sumptæ fuerint, multitudo, parva illa magnave fuerit. Quare et numero earum infinitè audito, ut partes

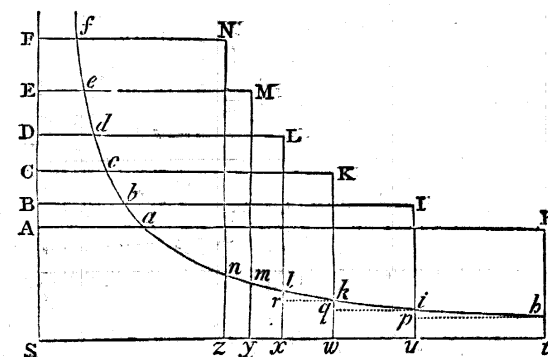
$AB,$

um, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas hyperbolicas, LIBER
obtinebunt eundem ordinem in aliâ ferie quantitatum continue SECUNDUS.
proportionalium (2).

P R O P. XXII. T H E O R. XVII.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis distantiarum suarum à centro reciproce proportionali deorsum trabantur : dico quòd, si distantie sumantur in progressione Musicâ, densitates fluidi in his distantiiis erunt in progressione Geometricâ.

Designet s . centrum, & s_A, s_B, s_C, s_D, s_E . distantias in pro-



greffione Geometricâ. Erigantur perpendiculara AH, BI, CK, &c. quæ sint ut Fluidi densitates in locis A, B, C, D, E, &c. & ipsius

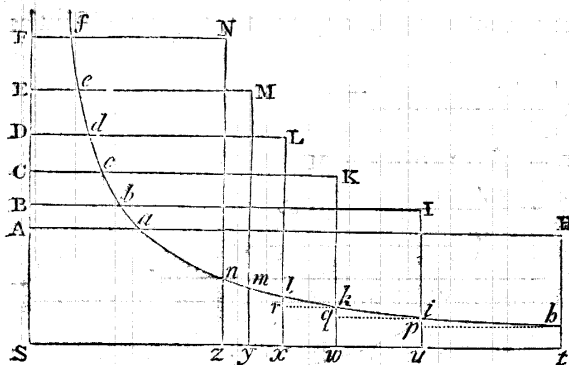
AB, EC, CD, DE, necnon densitatum AH, BI, CK, DL, EM differentie evanescant; inter evanescentes logarithmos, L, A, ratio data logarithmi rationis inter distantias SA, SE, ad logarithmum rationis inter densitates AH, EM vel ultimò manebit. Quæ verò logarithmi evanescentis L ad evanescentem A ultima est ratio, ea fluxionis logarithmi inter distantias ad fluxionem logarithmi inter densitates ratio erit. Quare fluxionibus hæc data ratio intercedet logarithmi rationis inter distantias datas SA, SE, ad logarithmum rationis inter densitates datas AH, EM. Eadem igitur fluentium inter ipsas ratio erit. Logarithmi igitur rationum inter densitates eorum, qui rationum inter distantias sunt logarithmi, rationem constanter servabunt. Jam verò in lineatione Newtoni (vid. fig. Cor.) positus SA, SE, SQ distantias, i AH, EM, QT sint inter se ut densitates in distantiis illis; spatia hyperbolica AAEI, EEQI rationum inter distantias SA, SE, SQ erunt logarithmi: item spatia hyperbolica BXYM, EEQY rationum inter densitates AH, EM, QT logarithmi. Quare YMIz : bXYM = EEQI : ECAI. Datis autem tribus distantias SA, SE, SQ, cum densitatibus duabus AH, EM, spatia tria ECAI, EEQI, bXYM magnitudine data sunt. Quare tertii bXYM ad quartum YMIz ratio data. Spatium igitur YMIz magnitudine datum. Quare recta etiam SY magnitudine datâ, dabitur magnitudine SZ, et illi æqualis QT (per Excerpt. ex Epist. 4 §. 7.)

gravitates

gravitates

De Motu
Corporum

gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam à B ad C, tertiam à C ad D, &c. Et hæc ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde est, in distantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficiant exponentes preffionum $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum densitates sunt ut harum preffionum summæ, differentiæ densitatum AH-BI, BI-CK, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Centro s, Asymptotis SA, sx describatur Hyperbola quævis, quæ fecit per-



pendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c, &c. ut & perpendiculara ad Asymptoton sx demissa ht, iu, kw in b, i, k; & densitatum differentiæ tu, uv, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times tb$, $uv \times ui$, &c. seu tp, uq , &c. ut $\frac{AH \times tb}{SA}, \frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut aa , bb , &c. Est enim, ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH vel st, ut tb ad aa, ideoque $\frac{AH \times tb}{SA}$ æquale aa. Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale bb, &c. Sunt autem aa, bb, cc, &c. continuè proportionales, & propterea differentiis suis aa-bb, bb-cc, &c. proportionales; ideoque differentiis hæc proportionalia sunt rectangula

(b) Nimirum è naturâ hyperbolæ dd erit ad ef ut sf ad sd. Unde dd-ef: ef=fd:sd. Sed ef:aa=sa:sf. Et sa:sf=ad:df propter progressionem musicam. Quare ef:aa=ad:df. Cum igitur sit dd-ef:ef=fd:sd; et ef:aa=ad:df: ex æquo perturbatè dd-

gula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum aa-cc vel aa-dd LIBER
SECUNDUS summæ rectangulorum tp+uq vel tp+uq+wr. Sunto ejusmodi termini quàm plurimi, & summa omnium differentiarum, puta aa-ff, erit summæ omnium rectangulorum, puta zibn, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantie punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ zibn, ideoque huic areæ proportionalis est differentia aa-ff. Sumantur jam distantie quælibet, puta SA, SD, SF in progressionem Musicâ, & differentiæ aa-dd, dd-ff erunt æquales (b); & propterea differentiis hæc proportionales areæ tbnx, xlnx æquales erunt inter se, & densitates st, sx, sz, id est, AH, DL, FN, continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area tbiu, harum differentiæ tu respondens; & inde invenietur densitas FN in altitudine quâcunque sf, sumendo aream tbnx ad aream illam datam tbiu ut est differentia aa-ff ad differentiam aa-bb.

Sebolium.

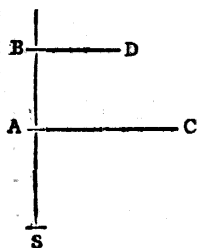
Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuat in triplicatâ ratione distantiarum à centro, & quadratorum distantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA \text{ cub.}}{SA^2}, \frac{SB \text{ cub.}}{SB^2}, \frac{SC \text{ cub.}}{SC^2}$) sumantur in progressionem Arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressionem Geometricâ. Et si gravitas diminuat in quadruplicatâ ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SA^4}{SA \text{ cub.}}, \frac{SB^4}{SB \text{ cub.}}, \frac{SC^4}{SC \text{ cub.}}$, &c.) sumantur in progressionem Arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressionem Geometricâ. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantis eadem sit, & distantie sint in progressionem Arithmeticâ, densitates erunt in progressionem Geometricâ, uti Vir CL. Edmundus Halleius invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progres-

dd-ef: aa=ad:sd. Quare rectangula dd-ef x sd et aa x ad inter se æqualia. Rursum, propter hyperbolam, aa:aa-dd=sd:ad. Quare rectangula aa-dd x sd et aa x ad inter se æqualia. Rectangula igitur dd-ef x sd, aa-dd x sd inter se æqualia. Quare aa-dd, dd-ef inter se æquales.

sione Arithmetica, densitates erunt in progressionem Geometricam. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi, compressione condensati, densitas est ut vis compressionis; vel, quod perinde est, spatium à Fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges; ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiae à centro, densitas erit reciprocè ut cubus distantiae. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiae, densitas erit reciprocè in sesquuplicatâ ratione distantiae.

(*) Sed omnes generatim in duas Formulas concludam.

Sit s centrum ad quod gravia tendant; sa distantia quælibet data, per litteram a designanda; sb alia quælibet, generaliter designanda per litteram x . Ea verò vis centripetæ sit conditio, ut potestatis cujusdam à distantia, cujus index sit m , rationem ea semper servet. Nimirum ut vis centripeta in loco A sit ad vim centripetam in loco B ut sa^m ad sb^m , existente nimirum indice m vel positivo vel negativo, integro vel fracto, modò non sit -1 . Jam si vis centripeta in loco dato A exponatur per rectam sa , vis centripeta in



loco quovis alio exponatur per rectam $\frac{sb^m}{sa^{m-1}}$; cujus hoc erit symbolum

algebraicum $\frac{x^m}{a^{m-1}}$. Ponatur recta ac cujusvis magnitudinis. Et sit

alia bd , quæ ad datam ac rationem habeat, quam densitas in loco B ad datam in loco A densitatem. Rectaque bd generaliter designetur litterâ y . Jam cum gravitas, in loco quovis s , symbolo $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ generaliter

significetur, hoc alio $\frac{x^m}{a^{m-1}} y x$, fluxionem vis comprimentis generaliter designare liceat. Quare si talis ponatur densitas materiæ fluidæ, quæ vis comprimentis rationem ubique servet, cum fluxio quoque densitatis fluxionem vis comprimentis rationem servare debeat, ponere licebit $\frac{x^m}{a^{m-1}} y x = \dot{y}$

designante nimirum illâ b rectam quandam justæ magnitudinis. Quare $\dot{y} : \frac{x^m}{a^{m-1}} x = y : b$. Sive

$\dot{y} : \frac{x^{m+1}}{m+1 \cdot a^m} = y : b$. Quare $\frac{1}{m+1} \frac{sb^{m+1}}{sa^m} - \frac{1}{m+1} sa$ logarithmus erit rationis ejus quam bd habet ad ac , sive densitas in loco B ad densitatem datam in loco A , pro modulo b . Unde si tales fumantur distantie sa , ut earum potestates per quantitatem $m+1$ indicatæ arithmetice usque crescant, densitatum progressio Geometrica erit.

2. Reliquis manentibus, talis ponatur densitas, quæ non simplici vis comprimentis rationi, sed rationi potestatis alicujus à vi comprimente constanter respondeat. Ejus potestatis index sit n , positivus quivis sive integer sive fractus, modò non sit $+1$, neve 0 . Neque omnino negativum ponere liceat indicem n , ne rarior esset materia fluida, quæ majore vi comprimeretur: qualem ulius materiæ conditionem rerum natura ægrè, ut opinor, patiatur. Designet littera c rectam quandam

tantia. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ distantie, & densitas erit reciprocè ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset (*). Cæterum per experimenta constat, quod densitas Aeris sit ut vis comprimens vel accuratè vel saltem quàm proximè: & propterea densitas Aeris in Atmosphærâ Terræ est ut pondus Aeris totius incumbentis; id est, ut altitudo Mercurii in Barometro.

ea lege mutabilem, ut vis comprimentis rationem ea semper gerat. Erit igitur no vel y ut c^n , et \dot{y} ut $nc^{n-1}\dot{c}$; vel, dato n , ut $c^{n-1}\dot{c}$. Hoc est, cum y^n sit ut c , ac proinde y ut $c^{1/n}$; \dot{y}

erit ut $\frac{1}{n} c^{1/n-1} \dot{c}$. Ponere igitur licebit $y = \frac{c^{1/n}}{b^{1/n}}$, sive $\frac{y^n}{b} = \frac{c}{b}$, designante b rectam quandam justæ

magnitudinis. (Geom. Flux. Def. 5.) At verò talis inveniebatur fluxio vis comprimentis, quæ rectanguli illius $\frac{x^m}{a^{m-1}} y x$ rationem constanter servaret. Quare recta c talis esse debet, quæ hujus rectanguli ratio-

nem servet. Unde ponere licet $ac = \frac{x^m}{a^{m-1}} y x$. Unde efficitur $\frac{x^m}{a^{m-1}} y x = \frac{a \cdot b^{1/n}}{y^n}$. Sive $\frac{a^{m-1}}{x^m} x = \frac{b^{1/n}}{y^n}$

$\frac{a^{m-1}}{x^{m-1}} = \frac{b^{1/n}}{y^n}$. Et ex hac fluxionum æquatione hæc alia fluentium venit, $\frac{a^{m-1} \dot{x}}{x^m} = \frac{b^{1/n} \dot{y}}{y^{n+1}}$; modò

illud generaliter obtineat, distantia x infinite auctâ, densitatem item sensim imminui; ut datâ quâvis tandem minor fiat: è contrario, distantia in nihilum redactâ, densitatem omni datâ ultimò majorem fieri. At si verò ponatur æquatio illa, distantiarum potestates, à quantitate $m+1$ indicatæ, earum à densitatibus potestatum, quas quantitas $\frac{n-1}{n}$ indicaverit, rationem contrarium gerent.

Jam si in casu primo pro n numeri $-3, -4, 0, 1$ ordine substituantur; in casu autem secundo si pro m scribatur -2 , & pro n quantitates $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ordine subrogentur, verissima inveniantur ea quæ, in casu utroque, à Newtono affirmata sunt.

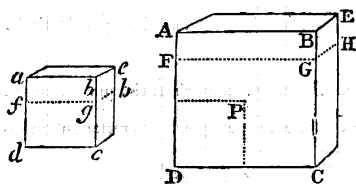
Cæterum in casu secundo necesse est ut quantitates $m+1, \frac{n-1}{n}$ eisdem prædicta sint signis.

Nam si contraria fortè gerant, fieri nequit ut distantia infinite auctâ densitas in nullam abeat; & vicissim, distantia infinite imminutâ, ut densitas infinite crescat.

Formulas generales, nostratum haud multum absimiles, post Varignonium, patres Doctissimi Le Sœur & Jacquier ad locum potuerunt.

Si Fluidi, ex particulis se mutuò fugientibus compositi, densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiiis centrorum suorum. Et vice versâ, particule viribus, quæ sunt reciproce proportionales distantiiis centrorum suorum, se mutuò fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico ACE; dein compressione redigi in spatium cubicum minus ace: & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, distantia erunt ut cuborum latera AB, ab; & Mediorum densitates reciproce ut spatia continentia AB, cub. & ab cub.



In cubi majoris latere plano, ABCD, capiatur quadratum, DP, æquale lateri plano cubi minoris, db; & ex hypòthesi, pressio, quâ quadratum DP urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem, quâ illud quadratum db urget Fluidum inclusum, ut Medii densitates ad invicem, hoc est, ut ab cub. ad AB cub. Sed pressio, quâ quadratum DB urget Fluidum inclusum, est ad pressionem, quâ quadratum DP urget idem Fluidum, ut quadratum DB ad quadratum DP, hoc est, ut AB quad. ad ab quad. Ergo, ex æquo, pressio quâ quadratum DB urget Fluidum, est ad pressionem quâ quadratum db urget Fluidum, ut ab ad AB (d). Planis FGH, fgh, per media cuborum ductis, distinguatur Fluidum in duas partes; & hæc se mutuò prement iisdem viribus, quibus premuntur à planis AC, ac (e); hoc est, in proportionem ab ad AB: ideoque vires centrifugæ, quibus hæc pressiones

(d) Nempe cum sit pressus quadrati DB ad pressum quadrati DP, ut AB^2 ad ab^2 , sive ut solidum AB^3 ad ab^3 ; cum sit etiam pressus quadrati DP ad pressum quadrati db ut ab^2 ad ab^2 , ex æquo erit pressus quadrati DB ad pressum quadrati db ut solidum AB^3 ad ab^3 , hoc est, ut recta ab ad rectam AB.

(e) Per Prop. XIX.

(f) LITERA E significetur densitas liquoris in spatium cubicum ade coacti; litera e minor ejusdem liquoris densitas, quâ spatium amplius cubicum ADE impleat. Jam si tales ponantur vires, quibus efficitur ut solida liquoris corpuscula se mutuò fugiant, quæ earum à centrorum distantiiis potestatum, quæ numero n indicatæ sint, rationem contrariam gerant, vires

fiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particulum numerum similemque situm in utroque cubo, vires, quas particule omnes secundum plana FGH, fgh exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum FGH in cubo majore, sunt ad vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum fgh in cubo minore, ut ab ad AB, hoc est, reciproce ut distantia particularum ad invicem. Q. E. D.

Et vice versâ, si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantia, id est, reciproce ut cuborum latera AB, ab; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum DB, db ut summæ virium; & pressio quadrati DP ad pressionem lateris DB ut ab quad. ad AB quad. Et, ex æquo, pressio quadrati DP ad pressionem lateris db ut ab cub. ad AB cub. id est; vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. Q. E. D.

Scholium.

Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicatâ ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si n ponatur pro distantia, & e pro densitate Fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantia dignitas quælibet n, cujus index est numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis e^{n+2} , cujus index est numerus $n+2$: & contrâ (f). Intelligenda verò sunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis, quæ terminantur in particulis proximis; aut non longè ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in sui generis corporibus sibi

vires illæ similes à rectis ab, AB potestatum contrariam rationem gerent; et pressus quadrati db erit ad pressum quadrati DB ut AB^n ad ab^n . Quare cum sit pressus quadrati DB ad pressum quadrati DP ut AB^2 ad ab^2 , rationes hæc componendo, efficitur pressus quadrati db ad pressum quadrati DP ut AB^{n+2} ad ab^{n+2} . Sed $e : c = AB^2 : ab^2$. Ergo $AB : ab = e^{\frac{1}{2}} : c^{\frac{1}{2}}$. Et

$AB^{\frac{n+2}{2}} : ab^{\frac{n+2}{2}} = e^{\frac{n+2}{4}} : c^{\frac{n+2}{4}}$. Quare pressus quadrati db ad pressum quadrati DP ut $e^{\frac{n+2}{4}} : c^{\frac{n+2}{4}}$. Q. E. D.

X x 2

proximis.

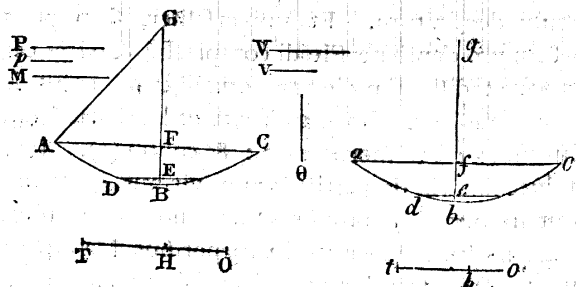
proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à Magnete quàm à laminâ trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex huiusmodi particulis componentur Fluida, de quibus actum est in hac Propositione. Quod si particulæ cuiusque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis Fluidi. An verò Fluida Elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex ejusmodi particulis constantium Mathematicè demonstravimus, ut Philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

S E C T I O VI.

De Motu & Resistentiâ Corporum Funependulorum.

P R O P.

(*) CORPORA pendula, centris e, g , funibus æqualibus oa, gb , suspensa, arcus asc, abc , vel circulares vel alios quoslibet, dummodo similes inter se sint & æquales, centris oscillationum d, b , in spatii vacui oscillando scribant. Arcuum asc, abc sumantur partes quævis inter se similes et æquales, & similiter in totis posita, ad, ad . Dicit Newtonus tempora, quibus conficiuntur.



arcus ad, ad , eandem inter se habere rationem, quam tempora quibus arcus integri asc, abc conficiendi sunt. Dicit etiam velocitates corporum in locis d, b rationem inter se habere à rationibus virium motricum et temporum, quibus arcus integri asc, abc conficiuntur, cum contrariâ materiæ ratione compositam.

Primum verò quod dicit Newtonus, id nos ostendimus hoc modo.

Exponatur recta p datæ cujuscunque longitudinis. Capiatur alia p , quæ ad illam p rationem habeat, quam pondus corporis b ad pondus corporis a . Capiatur etiam alia m , quæ habeat ad p rationem eam, quam materia corporis a ad materiam corporis b . Sint V, v rectæ eâ lege mutabiles, ut in omni magnitudine arcuum æqualium ad, ad , illæ V, v velocitatum in locis d, d inter

P R O P. XXIV. T H E O R. XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centro oscillationum à centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directè, & materia inversè. Quo major est vis, vel majus tempus, vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motûs Legem secundam manifestum est. Jam verò si Pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices, in locis à perpendiculo æqualiter distantibus, sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora, quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes, sint ut tempora oscillationum totarum; erunt velocitates ad invicem, in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ reciproce (*) : ideoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum

inter se rationem servent. Sint alie etiam rectæ $\tau h, th$, eâ lege mutabiles, ut temporum, quibus conficiantur arcus æquales ad, ad , hæ rationem servent. Et quando arcus illi in integros creverint, rectæ $\tau h, th$ longitudines to, to sint æquales; arcubus autem illis primùm nascentibus, cum temporibus, quibus arcus nascentes conficiuntur, in nihilum ipse singulatum abeant. Ostendere oportet rectas $\tau h, th$ cum illis to, to proportionem convenire. In rectas so, hg , quæ à punctis arcuum asc, abc mediis, ad perpendiculum fuerint erectæ, ducantur ab arcuum principis a, a , nec non à punctis d, d , rectæ af, af, de, de , cum plano horizontis parallele. Jam arcuum ad, ad fluxiones rationem inter se habebunt, à ratione velocitatum in locis d, d , cum eâ quæ temporum, quibus arcus illi conficiuntur, fluxionibus intercedit, compositam. Hoc est $ad : ad = V \times \tau h : v \times th$. At verò cum talia semper sint tempora $\tau h, th$, ut arcus ad, ad semper sint inter se æquales, arcuum etiam eorum fluxiones, ad, ad , semper erunt inter se æquales. Quare et rectangula $V \times \tau h, v \times th$ erunt inter se æqualia; et temporum $\tau h, th$ fluxiones velocitaturæ V, v contrariam inter se rationem gerent. At verò eæ sunt corporum in locis d, d velocitates, quas in locis e, e adeptæ essent, si à locis e, e vi propriâ utrumque ponderis rectâ cecidissent. Eam igitur velocitates illæ inter se rationem gerent, quæ efficitur à rationibus ponderum corporum a, b , temporumque quibus corpora illa, rectâ cadendo à locis e, e , spatia æqualia fe, fe confecerint, cum contrariâ materiæ, quæ corporibus inest, ratione compositis. Hoc est, cum sit pondus corporis a , ad pondus corporis b , ut p ad p , et materia in corpore b ad materiam in corpore a , ut m ad m ; ratio rectæ V ad v ea erit, quæ componitur à rationibus rectæ p ad m , temporisque, quo corpus a rectâ cadendo confecerisset spatium fe , ad tempus quo corpus alterum b , rectâ itidem cadendo, confecerisset spatium fe . Sit igitur θ recta quadam eâ lege mutabilis, ut ad mutabilem τh eam semper rationem gerat, quam tempus, quo corpus b spatium fe casu recto confecerisset, ad tempus quo corpus a casu recto confecerisset spatium fe . Igitur V erit ad v ut rectangulum $p \times \tau h$ ad rectangulum $m \times \theta$. At verò.

num tempora directè & velocitates reciprocè. Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora: atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè sunt ut quadrata temporum; & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum; id est, ut pondera & quadrata temporum. Q. E. D.

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol.

verò cum corpora, oscillando per arcus ABC , abc , in locis à perpendiculari æqualiter remotis, quæ semper erunt illa p , d , à viribus urgeantur quæ ipsam ponderum rationem inter se constanter gerant; fieri nequit, quin tempora, quibus corpora è locis F , f , in loca E , e , vi proprii utrumque ponderis, rectâ cecidissent, ad tempora quibus conficiuntur arcus similes et æquales AB , ad , similem singulatum rationem gerant. Hoc est, fieri nequit, quin sit $TH:tb=TH:\theta$. Fieri igitur nequit, quin sint æquales rectæ illæ tb , θ , et rectangula $m \times \theta$, $m \times tb$ inter se æqualia. Cum igitur sit $V:v=p \times TH:m \times \theta$, erit etiam $V:v=p \times TH:m \times tb$. At verò jam antè ostendimus esse V ad v ut tb ad TH . Erit igitur $tb:TH=p \times TH:m \times tb$. Quare $tb \times tb:TH \times TH=p \times m$. Sed $tb \times tb:TH \times TH=m \times tb:m \times TH$. Ex æquo igitur $tb \times tb:TH \times TH=p:m$. Quadratorum autem è rectis tb , TH fluxiones rectangulorum, $tb \times tb$, $TH \times TH$ inter se rationem gerunt. Quare fluxionibus illis constans rectarum p , m ratio intercedet. Eadem igitur et fluentibus; ipsis utique rectarum tb , TH quadratis; siquidem quadrata illa, cum rectis ipsis arcibusque AB , ad simul generari inceperint. Rectarum igitur TH , tb , quarum duplicata ratio data est, earum propria certè inter ipsas ratio dabitur. Et si arcus AB , ad , semper inter se æquales, in totos ABC , abc creverint, et rectæ TH , tb in illas TO , to ; erit TH ad tb ut TO , to ; et tempora quibus arcus æquales AB , ad conficiuntur, quorum utique temporum rationem rectæ TH , tb referunt, ea cum temporibus, quibus arcus integri conficiuntur, per rectas TO , to expositis, proportionem conveniunt. Q. E. D.

Jam verò quod alterum Newtonus dicit, esse V ad v ut $p \times TO$ ad $m \times to$, id ex iis quæ ostensa sunt, faciliè obtinendum est. Nempe ostendimus TH esse ad tb ut TO ad to . Erit igitur $p \times TH$ ad $m \times tb$ ut $p \times TO$ ad $m \times to$. Sed illud etiam ostendimus, esse V ad v ut $p \times TH$ ad $m \times tb$. Quare $V:v=p \times TO:m \times to$. Q. E. D.

CÆTERUM Propositio ipsa, cujus approbandæ gratiâ hæc velocitatum ratio allegata est, vel ex eo satis in aperto posita est, quod modò nos ostendimus, rectis m , p rationem inter se habere, ejus quæ temporibus TH , tb , quibus arcus æquales conficiuntur, intercedit, duplicatam. Cum enim sit $m:p=TH^2:tb^2=TO^2:to^2$; ratio m ad p , quæ componitur è rationibus rectæ m ad p , rectæque p ad p , ea componitur è rationibus rectæ p ad p et quadrati ex TO ad quadratum ex to . Sed ratio rectæ m ad p ea est quæ materiæ in corpore A ad materiam in corpore B ; et ratio rectæ p ad p ea est quæ ponderis corporis A ad pondus corporis B ; et ratio mutua rectarum TO , to , ea temporum, quibus corpora arcus integros oscillando confecerint, mutua est ratio. Ratio igitur materiæ ad materiam composita est è ratione ponderum cum duplicatâ temporum ratione. Q. E. D.

(b) CORPORA A , a , à centrâ G , g , funibus longitudine inæqualibus, GB , gb suspensâ, arcus ABC , abc sive circulares, sive alios quoslibet, inæquales quidem, sed inter se similes, in spatiis vacuis oscillando, centrâ oscillationum E , e scribant. Posuit Newtonus in Corollario quarto, temporum, quibus corpora arcus similes ABC , abc confecerint, quadrata esse inter se sicut longitudines GE , ge , si corpora A , a tam pondere quàm materiâ inter se fuerint æqualia. Inde verò confectui ait, pondera corporum, A , a , longitudinum, GE , ge , rationem inter se servare, si æqualis sit in utroque corpore materia, et si tempora oscillandi per arcus illos similes æqualia sint. Et in Corollario quinto, id universè constituit, materiam corporis cujuscunque penduli rationem è tribus rationibus

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines Pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines Pendulorum.

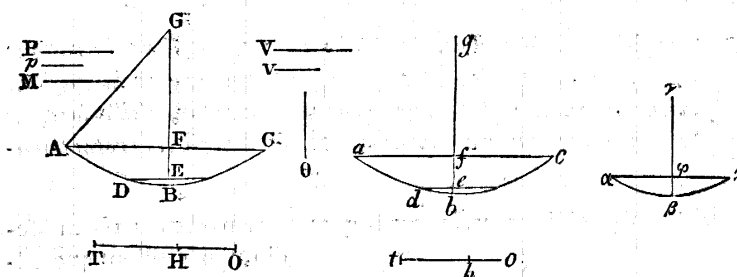
Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo Penduli inversè (b).

Corol.

tionibus compositam, ponderis, duplicatâ temporis, contrariâ longitudinis, constanter servare.

Nos primùm quod posuit Newtonus sic ostendimus.

Per puncta A , c , a , e , arcuum similium ABC , abc extrema, ducantur rectæ AC , ac , quæ rectis GB , gb , quæ à mediis arcuum illorum punctis ad perpendicularum fuerint erectæ, in punctis F , f occurrant. Jam cum similes sint arcus ABC , abc , idcirco in locis, quæ à perpendicularo æqualibus va-



illantium funium inclinationibus remota fuerint, corpora, per arcus ABC , abc oscillando, à viribus incitantur, quæ ipsorum ponderum rationem inter se constanter gerent. Ac propterea fieri nequit, quin tempora, quibus corpora, si è locis F , f , cecidissent, vi proprii utrumque ponderis in loca B , b casu recto delata essent, ad tempora, quibus arcus similes ABC , abc oscillando conficiantur, similem rationem gerant. Quare et duplicata illorum ratio horum etiam duplicata erit. Atqui spatia FB , fb , cum corpora ponantur jam pondere quàm materiâ inter se æqualia, rationem inter se habebunt temporum, quibus casu recto confecta essent, duplicatam: quare et eorum temporum duplicatam, quibus arcus similes ABC , abc corpora oscillando confecerint. Sed cum similes sint arcus illi ABC , abc , quæ spatiis FB , fb eadem longitudinibus GB , gb inter ipsas ratio erit. Quare et longitudines illæ temporum, quibus arcus ABC , abc conficiantur, rationem inter se duplicatam gerant. Sicut in Corollario 4, Newtonus posuit. Q. E. D.

Inde verò quod in Corollario quinto Newtonus universè constituit, faciliè argumento obtinebimus. Manente enim corporum A , a , cum materiæ tum ponderis æqualitate, intelligatur corpus quodpiam tertium b centro g , fune gb , qui illius GB longitudine æqualis, sit suspensum, arcum abc oscillando scribere illius ABC similem et æqualem. Jam materia corporis a ad materiam corporis A , sive ad materiam corporis a , rationem habet è ratione ponderis corporis a ad pondus corporis A vel a , cum temporis, quo conficitur arcus abc , ad tempus, quo conficitur arcus ABC , duplicatâ ratione compositam (per Prop. xxiv.) Sed temporis, quo conficitur arcus abc , ad tempus, quo conficitur arcus ABC , duplicatâ ratio componitur è duplicatâ temporis quo conficitur arcus abc ad tempus quo arcus abc , et duplicatâ ejus quo arcus abc ad tempus quo arcus ABC . Quæ postrema eadem est quæ longitudinis gb ad longitudinem GB vel gb : sicut Newtonus posuit, et à nobis ostensum est. Quare materia corporis a ad materiam corporis A rationem habet ex tribus compositam; ponderis

Corol. 6. Sed & in Medio non resistente (c) quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inversè. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut supra explicui; ideoque idem præstat in tali Medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quàm accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

P R O P. XXV. T H E O R. XX.

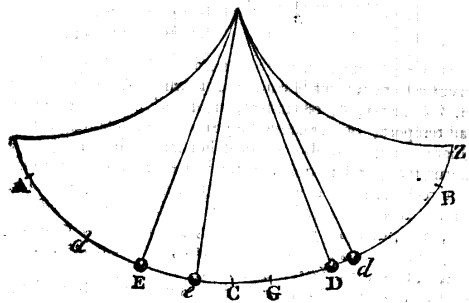
Corpora funependula quibus, in Medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula que in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit AB Cycloidis arcus, quem corpus D, tempore quovis in Medio non resistente, oscillando describit. Bifecetur idem in C, ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix, quâ corpus urge-
tur in loco quovis D, vel d, vel E, ut longitudo arcus CD, vel cd, vel CE. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis,

ponderis a ad pondus a, temporum quibus consueantur arcus abc, abx duplicatâ, et longitudinam gb, yb contrariâ. Q. E. D.

Hæc verò veritatem ejusmodi in Corollario quarto Newtonus affirmavit, quivis colliget. Corporum pendulorum a, a pondera significantur literis a, a; materiæ illius literâ m; hujus, literâ µ. Tempora quibus arcus similes abc, abx oscillando confecerint literis t, τ. Cum sit $m:µ = a \times t^2 \times \gamma\beta : a \times \tau^2 \times \gamma\beta$; si ponantur m, µ inter se æquales, erunt $a \times t^2 \times \gamma\beta, a \times \tau^2 \times \gamma\beta$ inter se æqualia. Unde si æqualia sint a, a, erant etiam $a \times \gamma\beta, a \times \gamma\beta$ inter se æqualia. Ac propterea

5

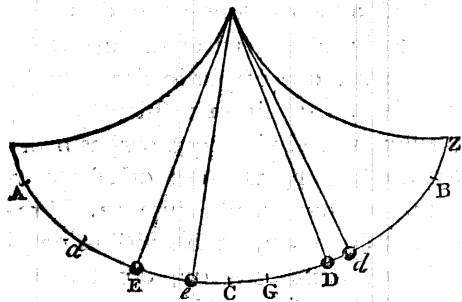


ideoque detur (d), exponatur eadem per datam arcus Cycloidis partem CG; & fumatur arcus cd in ratione ad arcum CD quam habet arcus GB ad arcum CB: & vis, quâ corpus in d urgetur in Medio resistente, cum sit excessus vis cd supra resistentiam CG, exponetur per arcum cd; ideoque erit ad vim, quâ corpus D urgetur in Medio non resistente in loco D, ut arcus Gd ad arcum CD; & propterea etiam in loco B ut arcus GB ad arcum CB. Proinde si corpora duo, D, d exeant de loco B, & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus CB & GB, erunt velocitates primæ & arcus primò descripti in eadem ratione. Sinto arcus illi BD & Bd; & arcus reliqui CD, Gd erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipsis CD, Gd proportionales manebunt in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, Gd semper erunt ut arcus totius CB, GB; & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo D, d simul pervenient ad loca C & G; alterum quidem in Medio non resistente ad locum C, & alterum in Medio resistente ad locum G. Cum autem velocitates in C & G sint ut arcus CB, GB; erunt arcus, quos corpora, ulteriùs pergendo, simul describunt, in eadem ratione. Sinto illi CE & Ge. Vis, quâ corpus D in Medio non resistente retardatur in E, est ut CE; & vis, quâ corpus d in Medio resistente retardatur in e, est ut summa vis ce & resistentiæ CG, id est ut ce; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus CE, Ge proportionales arcus CB, GB; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eadem datâ ratione. Velocitates igitur, & arcus iisdem descripti, semper sunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum CB & GB; & propterea si fumantur arcus totius AB, ab in eadem ratione, corpora D, d simul describent hos arcus, & in locis A & a motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, & arcubus to-

terea a : a = gb : γβ. Pondera ut longitudines. Q. E. D.

(c) — medio non resistente.] Hoc est, in spatio materiâ quâdam consperso, modò ulla talis cogitari possit, quæ, cum gravitate prædita esset, vi tamen inertie destitueretur. Corpora, in tali materiâ, sive pendula oscillarent, sive quovis modo per eam iter facerent, nullam quidem ex ejus offensibus mutationem motus subirent, licet minore vi deorsum traherentur, quàm quæ in inani constituta essent.

(d) — detur,] i. e. constans sit.



G, quo arcus totus descriptus AB bifecatur. Et corpus, subinde pergendo ad a, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo à B ad G.

P R O P. XXVI. T H E O R. XXI.

Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloide sunt Isochronæ.

Nam si corpora duo, à centris suspensionum æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti; resistentiæ, velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cùmque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti. Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cùm sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. Q. E. D.

P R O P.

tis, BA, BZ, proportionales sunt arcuum partes quælibet BD, Bd vel BE, Be quæ simul describuntur. Q. E. D.

Corol. Igitur motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum infimum c, sed reperitur in puncto illo

P R O P. XXVII. P R O B. XXII.

LIBER
SECUNDUS.

Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in Medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quàm proximè.

Nam pendulis æqualibus in Medio resistente describantur arcus inæquales A, B; & resistentia corporis in arcu A, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum; id est, ut AA ad BB, quàm proximè. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propositionem superiorem. Ideoque resistentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in Medio non resistente; & resistentia BB efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in Medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes AB & BB quàm proximè, id est, ut arcus A & B. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in Medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in Medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ; & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in Medio non resistente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora; propterea quòd resistentia in descensu corporis, quâ tempus producit, major sit, pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quàm resistentia in ascensu subsequente, quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardescentibus paulo minùs resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis, quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia Medium,

Y y 2

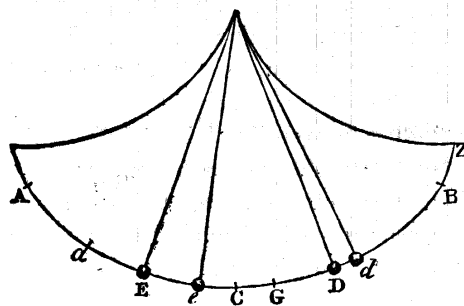
eo

eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergen-
do, in priore casu magis agitur, in posteriore minus; ac pro-
inde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis
igitur in descensu magis refistit, in ascensu minus quàm pro ra-
tione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producit.

P R O P. XXVIII. T H E O R. XXIII.

*Si corpori funependulo in Cycloide oscillanti resistitur in ratione mo-
mentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut ex-
cessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subse-
quente descriptum, ad Penduli longitudinem duplicatam.*

Designet BC arcum descensu descriptum, ca arcum ascensu de-
scriptum, & Aa differentiam arcuum: & stantibus quæ in Propo-
sitione xxv. constructa & demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus
oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut arcus CD



ad arcum CG, qui semif-
sis est differentiæ illius
Aa. Ideoque vis, quâ
corpus oscillans urgetur
in Cycloidis principio, seu
puncto altissimo, id est,
vis gravitatis, erit ad re-
sistentiam ut arcus Cyclo-
idis inter punctum illud
supremum & punctum

infimum c ad arcum CG; id est (si arcus duplicentur) ut Cycloi-
dis totius arcus, seu dupla Penduli longitudo (e), ad arcum Aa.
Q. E. D.

P R O P. XXIX. P R O B. VI.

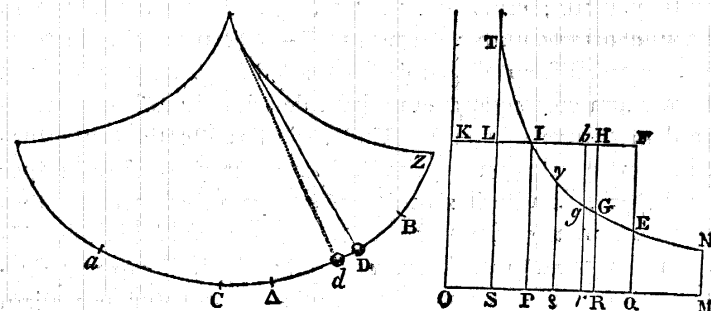
*Posito quod corpori in Cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione
velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.*

Sit Ba arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque c infimum
Cycloidis punctum, & cz semifis arcus Cycloidis totius, longitu-

(*) Vide Cotesium de motu Pendulorum in Cycloide. Prob. & Lemm. III.

dini

dini Penduli æqualis; & quæatur resistentia corporis in loco quo-
vis D. Secetur recta infinita oq in punctis o, s, p, q; eâ lege,
ut (si erigantur perpendiculara ok, st, pi, qe, centroque o & A-
symptotis ok, oq describatur Hyperbola TIGE secans perpendicu-
la st, pi, qe in t, i & e, & per punctum i agatur kf parallela
Asymptoto oq occurrens Asymptoto ok in k, & perpendicularis st
& qe in l & f) fuerit area hyperbolica pieq ad aream hyperbo-
licam pits ut arcus bc, descensu corporis descriptus, ad arcum



ca ascensu descriptum; & area ief ad aream ilt ut oq ad os.
Dein perpendicularo mn abscindatur area hyperbolica pinm, quæ
fit ad aream hyperbolicam pieq ut arcus cz ad arcum bc descen-
su descriptum. Et si perpendicularo rg abscindatur area hyper-
bolica pigr, quæ fit ad aream pieq ut arcus quilibet cd ad ar-
cum bc descensu toto descriptum; erit resistentia in loco D ad
vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ ad aream pinm.

Nam cum vires à gravitate oriundæ, quibus corpus in locis z,
B, D, a urgetur, sint ut arcus cz, cb, cb, ca, & arcus illi sint ut
arcæ pinm, pieq, pigr, pits; exponantur tum arcus tum vires
per has areas respectivè. Sit insuper dd spatium quàm mini-
mum, à corpore descendente descriptum, & exponatur idem per
aream quàm minimam rggr, parallelis rg, rg comprehensam; &
producat r g ad b, ut fiat ghbg, & rggr contemporanea area-
rum igh, pigr decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incrementum,
 $GHbg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$, erit ad areæ pigr decremen-
tum, $RGgr$, seu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut $OR \times HG -$

I

OR

DE MOTU
CORPORUM

OR
OQ IEF ad OR × GR, seu OP × PI; hoc est (ob æqualia OR × HG, OR × HR - OR × GR, ORHK - OPIK, PIHR & PIGR + IGH) ut PIGR + IGH - OR
OQ IEF ad OPIK. Igitur si area OR
OQ IEF - IGH dicatur \mathcal{I} , atque area PIGR decrementum RGG' detur, erit incrementum areae \mathcal{I} ut PIGR - \mathcal{I} .

Quod si V designet vim à gravitate oriundam, arcui describendo cd proportionalem, quâ corpus urgetur in D , & R pro resistentiâ ponatur; erit $V - R$ vis tota, quâ corpus urgetur in D . Est itaque incrementum velocitatis ut $V - R$ & particula illa temporis, in quâ factum est, conjunctim: sed & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directe & particula eadem temporis inverse. Unde, cum resistentia per hypothesein sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per Lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est, ut momentum spatii & $V - R$ conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut $V - R$; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens PIGR, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z , ut PIGR - Z .

Igitur area PIGR per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area \mathcal{I} in ratione PIGR - \mathcal{I} , & area Z in ratione PIGR - Z . Et propterea si areae \mathcal{I} & Z simul incipiant, & sub initio æquales sint, hæ, per additionem æqualium momentorum, pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt et simul evanescent, æqualia habebunt momenta, & semper erunt æquales: id adeo quia si resistentia Z augeatur, velocitas, unâ cum arcu illo ca qui in ascensu corporis describitur, diminuetur;

(¹) MIRA certè argumenti subtilitas, neque tamen evidentia minor; nisi quòd illud fortè obscurius dictum sit, cur areae \mathcal{I} , z , si initio five crescendi five decrescendi æquales fuerint, semper æquales maneant. Hujus autem ratio hæc nititur Propositione.

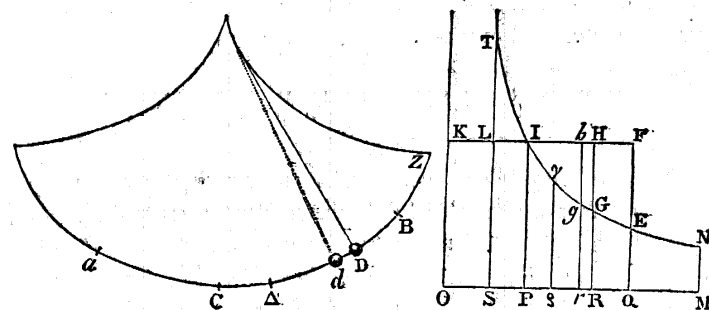
THEOREMA.

Si magnitudines initio æquales simili modo fluant, atque eâ etiam lege, ut fluentium magnitudines, fluendo simul factæ, fluxionibus suis auctæ semper inter se æquales sint; fluentes ipsæ semper erunt inter se æquales.

Magnitudines æquales AB , CD similiter fluant, i. e. vel crescendo utraque vel utraque decrescendo, et earum sub initio fluxus, sint AE , CF (sensu Def. 5. Geom. Flux.) fluxiones. Sint Ab , cd ; Ab , cd fluentium magnitudines fluendo simul factæ; quarum etiam fluxiones (sensu Def. 5. Geom. nostræ

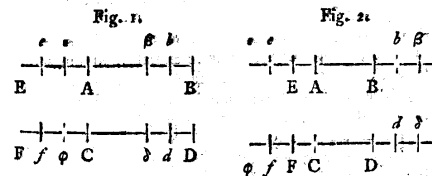
diminuetur; & puncto in quo motus omnis, unâ cum resistentiâ, cessat, propius accedente ad punctum c , resistentia citius evanescet quàm area \mathcal{I} . Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam verò area Z incipit definitque ubi resistentia nulla est; hoc est, in principio motus, ubi arcus cd arcui cb æquatur, & recta RG incidit in rectam QE ; & in fine motus, ubi arcus cd arcui ca æquatur & RG incidit in rectam ST . Et area \mathcal{I} , seu OR
OQ IEF - IGH, incipit definitque ubi nulla est; ideoque ubi OR
OQ IEF & IGH æqualia sunt; hoc est (per constructionem) ubi recta RG



incidit successive in rectas QE & ST . Proindeque areae illæ simul incipiunt & simul evanescent, & propterea semper sunt æquales. Igitur area OR
OQ IEF - IGH æqualis est areae Z , per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream PINM, per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem (¹). Q. E. D.

Corol.



nostræ Flux.) sint Ae , Cf ; At , Ct ; magnitudines utique in eodem genere in quo sunt fluentes. Ea denique sit fluendi lex, ut sint EP , FD , nec non eb , fd ; eb , fd inter se æquales. Dico fluentes esse semper inter se æquales, si eas conferantur magnitudines, quæ fluendo simul existant. Hoc est dico $Ab = cd$, et $Ab = cd$. Magnitudinibus enim Ab , cd eas manere singatur fluendi velocitates, quas initio fluxus quæque habuit, usque dum novas illas longitudes Ab , cd sint adeptæ: inde verò velocitates fluendi in alias subito mutari, quæ sint ad priores ut rectæ Ae , Cf ad illas At , Ct . Atque rursus magnitudinibus fluentibus hæ novæ fluendi velocitates mancant, usque dum fluentes Ab , cd in illas Ab , cd mutata fuerint. Inde verò velocitates in

DE MOTU
CORPORUM

ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{1}{2}BA$ & ov quam proximè. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}BA$ & AZ æquale rectangulo sub $\frac{1}{2}BA$ & ov, ideoque ov æqualis $\frac{1}{2}AA$: & propterea corporis oscillantis resistentia in o ad ipsius gravitatem ut $\frac{1}{4}AA$ ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abundè satis accuratas esse censeo. Nam cum Ellipsis vel Parabola BRV α congruat cum figurâ BKV α in puncto medio v, hæc, si ad partem alterutram BRV vel v α excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proximè.

P R O P. XXXI. T H E O R. XXV.

Si corporis oscillantis resistentia, in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus, augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, ideoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub rectâ AB , & arcuum illorum CB, CA differentia, AA, æqualis erat areae AK α . Et area illa, si maneat longitudo AB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum BK; hoc est, in ratione resistentiæ, ideoque est ut longitudo AB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub AA & $\frac{1}{2}AB$ est ut AB & resistentia conjunctim, & propterea AA ut resistentia. Q. E. D.

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contra.

Eadem

Eadem erit lex & ratio resistente pro velocitate, quæ est differentie illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si Pendulo inæquales arcus successive describente inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his Propositionibus, per oscillationes Pendulorum in Mediis quibuscunque, invenire licet resistentiam Mediorum. Aeris verò resistentiam investigavi per Experimenta sequentia.

Globum ligneum pondere unciarum Romanarum 57 $\frac{1}{2}$, diametro digitorum Londinensium 6 $\frac{1}{2}$ fabricatum, filo tenui ab unco factis firmo suspendi; ita ut inter uncum & centrum oscillationis Globi distantia esset pedum 10 $\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una à centro suspensionis distans; & e regione puncti illius collocavi Regulam, in digitos distinctam, quorum ope notarum longitudines arcuum à Pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes, quibus Globus octavam motus sui partem amitteret. Si Pendulum deducebatur à perpendiculo ad distantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totaque oscillatione primâ, ex descensu & ascensu subsequente compositâ, arcum digitorum fere quatuor: idem oscillationibus 164 amisit octavam motus sui partem; sic ut, ultimo suo ascensu, describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 121; ita ut, ascensu ultimo, describeret arcum digitorum 3 $\frac{1}{2}$. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 69, 35 $\frac{1}{2}$, 18 $\frac{1}{2}$, 9 $\frac{1}{2}$, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respectivè. Dividantur hæc differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum 3 $\frac{1}{2}$, 7 $\frac{1}{2}$, 15, 30, 60,

DE MOTU
CORPORUM

60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum erit $\frac{1}{63,6}$, $\frac{1}{141,8}$, $\frac{1}{36,9}$, $\frac{4}{141,8}$, $\frac{8}{36,9}$, $\frac{16}{141,8}$ partes digiti respectivè. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ

(*) Neque tamen universè illud videtur obtinere, ut quo majores sint oscillationes, eò propius vires renixus duplicatam attingant velocitatum rationem. Nam cum arcuum differentie fuerint quales à Newtono sunt descriptæ, si omnes ordine à primâ dividantur, numeri à divisione oriundi, earum omnium inter se & ad primam rationes exhibebunt. Atqui hi sunt numeri à divisione oriundi

1 2,71 9,507 36,96 141,84 543

Motu igitur corporis penduli ad Cycloidem redactò, quâ ratione Newtonus mox dicturus est, vires renixus, quales in mediis arcuum Cycloideos punctis fuissent, si per tales arcus corpus pendulum latum esset, eas inter se rationes habuissent, quas hi numeri præ se ferunt; arcus autem ipsi Cycloideos eandem inter se rationem habuissent, quam circulares quos corpus pendulum centro oscillandi suo reverâ scribebat; quorum communis ratio minoris cujusque ad proximum, unitatis ad binarium erat. Velocitatum igitur, quibuscum in similibus arcuum illorum Cycloideos punctis corpus pendulum latum esset, et harum eadem inter ipsas communis ratio, unitatis ad binarium, fuisset. Velocitatum igitur illarum duplicata ratio unitatis ad quaternarium fuisset. Hæc cum ita sint, quænam fuisset vis renixus in medio arcus cujusque Cycloidalis puncto, si ad eam, quæ in puncto medio arcus proximè majoris regnasset, rationem habuisset velocitatum duplicatam; & quænam sui parte vis renixus, in medio arcus cujusque minoris puncto, major fuisset quàm pro duplicatâ velocitatum ratione, ex sequenti numerorum descriptione quivis ut opinor intelligat

4 : 1 = 543	: 135,75	141,84	$\frac{6,1}{141,8} = \frac{1}{23}$
4 : 1 = 141,84	: 35,46	36,96	$\frac{1,5}{36,9} = \frac{1}{25}$
4 : 1 = 36,96	: 9,24	9,51	$\frac{1,27}{9,51} = \frac{1}{35}$
4 : 1 = 9,51	: 2,37	2,71	$\frac{1,34}{2,71} = \frac{1}{8}$
4 : 1 = 2,71	: 0,68	1	$\frac{1,13}{1} = \frac{3}{10}$

Hic in maximis arcubus, minùs quidem quàm in mediis, servatam videre est inter vires renixus duplicatam velocitatum rationem. A quâ quantum et in aliis Newtoni experimentis vires illæ abscesserint, haud inutile erit simili numerorum descriptione oculis subjecisse.

EXPERIMENTA IN GLOBO LIGNEO

Qui in AERE oscillabat donec pars QUARTA Motus extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{748}$	$\frac{1}{272}$	$\frac{4}{325}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{24}{125}$	$\frac{12}{17}$
Differentiarum rationes	1	2,75	9,21	35,9	143,6	528

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 528	: 132	143,6	$\frac{11,6}{143,6} = \frac{1}{12}$
4 : 1 = 143,6	: 35,9	35,9	$\frac{0}{35,9} = \frac{1}{0}$
4 : 1 = 35,9	: 8,97	9,21	$\frac{1,24}{9,21} = \frac{1}{38}$
4 : 1 = 9,21	: 2,30	2,75	$\frac{1,45}{2,75} = \frac{1}{6}$
4 : 1 = 2,75	: 0,69	1	$\frac{1,1}{1} = \frac{3}{10}$

LIBER
SECUNDUS.

duplicatâ ratione arcuum descriptorum quàm proximè; in minoribus verò paulo majores quàm in eâ ratione; & propterea (per Corol. 2. Prop. xxxi. libri hujus) resistentia Globi, ubi celerius movetur, est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardius, paulo major quàm in eâ ratione (*).

Designet jam v velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates datæ; & fingamus quòd differentia arcuum sint $AV + BV^2 + CV^3$. Cum velocitates maximæ sint, in Cycloide,

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO

Qui in AERE oscillabat donec pars OCTAVA motus extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{1808}$	$\frac{1}{912}$	$\frac{1}{386}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{4}{181}$	$\frac{4}{53}$	$\frac{4}{15}$
Differentiarum rationes	1	1,98	4,86	12,91	39,96	136,4	482,1

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 482,1	: 120,5	136,4	$\frac{15,9}{136,4} = \frac{10}{86}$
4 : 1 = 136,4	: 34,1	39,99	$\frac{5,9}{39,9} = \frac{1}{7}$
4 : 1 = 39,96	: 9,99	12,91	$\frac{3}{12,9} = \frac{1}{4,3}$
4 : 1 = 12,91	: 3,23	4,68	$\frac{1,45}{4,68} = \frac{1}{3,2}$
4 : 1 = 4,68	: 1,17	1,98	$\frac{1,81}{1,98} = \frac{1}{2,1}$
4 : 1 = 1,98	: 0,49	1	$\frac{1,15}{1} = \frac{1}{2}$

EXPERIMENTA IN EQDEM GLOBO PLUMBEO

Qui in AERE oscillabat donec pars QUARTA motus extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{2040}$	$\frac{1}{1036}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{8}{121}$	$\frac{8}{35}$
Differentiarum rationes	1	1,97	4,86	12,83	40	134,9	466,3

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 466,3	: 116,6	134,9	$\frac{18,3}{134,9} = \frac{1}{7}$
4 : 1 = 134,9	: 33,5	40	$\frac{6,5}{40} = \frac{1}{6}$
4 : 1 = 40	: 10	12,83	$\frac{2,8}{12,8} = \frac{1}{4,6}$
4 : 1 = 12,83	: 3,21	4,86	$\frac{1,65}{4,86} = \frac{1}{3}$
4 : 1 = 4,86	: 1,21	1,97	$\frac{1,76}{1,97} = \frac{1}{2,5}$
4 : 1 = 1,97	: 0,49	1	$\frac{1,5}{1} = \frac{1}{2}$

EXPE-

EXPE-

De Motu
Corporum

cloide, ut semisses arcuum oscillando descriptorum, in Circulo verò, ut semissium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores sint in Cycloide quàm in Circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo sint majora quàm in Cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ sunt ut resistentia & quadratum temporis conjunctim) easdem fore quamproximè in utraque Curvâ; deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, unâ cum resistentiâ, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ simplici auctam; & diminui, unâ cum quadrato temporis, in eadem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eadem sumendæ sunt arcuum differentiæ, quæ fuerunt in Circulo observatæ; velocitates verò maximæ ponendæ

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO MAJORE.

Qui in AERE oscillabat donec pars QUARTA motus extincta erat.

Arcuum differentia	$\frac{2}{535}$	$\frac{4}{287}$	$\frac{32}{171}$
Differentiarum rationes	1	3,73	50
Velocitatum rationes	1	2	8

16 : 1 =	50 : 3,125	3,73	$\frac{16}{3,7} = \frac{1}{6}$
4 : 1 =	3,73 : 0,93	1,	$\frac{1,07}{1} = \frac{1}{14}$

Mitto experimenta hujus Globi in Aquâ oscillantis, propter errores ex vasis angustia oriundos.

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO MINORE

Qui in AQUA oscillabat donec pars QUARTA motus extincta erat.

Arcuum Differentia	$\frac{5}{4976}$	$\frac{1}{424}$	$\frac{1}{136}$	$\frac{5}{212}$	$\frac{12}{145}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{32}{27}$
Differentiarum rationes	1	2,35	7,32	23,5	82,36	306,2	1179,5

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 =	1179,5	294,9	306,2	$\frac{11,3}{306,2} = \frac{1}{27}$
4 : 1 =	306,2	76,55	82,36	$\frac{5,8}{82,4} = \frac{1}{15}$
4 : 1 =	82,36	20,59	23,5	$\frac{2,9}{23,5} = \frac{1}{8}$
4 : 1 =	23,5	5,87	7,32	$\frac{1,45}{7,32} = \frac{1}{5}$
4 : 1 =	7,32	1,83	2,35	$\frac{1,52}{2,35} = \frac{1}{4,5}$
4 : 1 =	2,35	0,59	1	$\frac{1,4}{1} = \frac{2}{3}$

sunt

sunt arcubus, vel dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto & sexto numeros 1, 4 & 16 pro v; & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{121} = A + B + C$ in casu secundo; $\frac{2}{351} = 4A + 8B + 16C$ in casu quarto; & $\frac{8}{93} = 16A + 14B + 256C$ in casu sexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $A = 0,0000916$; $B = 0,0010847$; & $C = 0,0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0000916v + 0,0010847v^2 + 0,0029558v^3$; & propterea, cum (per Corollarium Propositionis xxx. applicatum ad hunc casum) resistentia Globi, in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est v, fit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^2$ (m) + $\frac{1}{4}CV^3$ ad longitudinem Penduli; si pro A, B & C scribantur

(m) Nimirum vis renixus, quam literâ R significare liceat, trifariam intelligatur distribui, sive ex tribus viribus constari, quas singulatim literis r, r, r, significabimus; ut sit $R = r + r + r$. Harum trium partium, ex quibus vis tota R constata est, prima r talis sit, quæ simplici semper velocitatis corporis penduli rationi respondeat; ultima r rationem velocitatis duplicatam servet; media r rationem illam quæ simplicis & duplicatæ velocitatis media est, quam Newtonus sequiplicatam vocare solet. Vel ut clariùs dicamus, si sint v, v² duæ rectæ eâ lege mutabiles, ut illa v simplicem velocitatis rationem, illa v² duplicatam semper gerat; sit alia v³ eâ lege mutabilis, ut duarum v, v² proportionem semper media sit. Et tales ponantur vires r, r, r, ut illa r rectæ v, illa r rectæ v², illa r rectæ v³ semper rationem servet. Similiter arcuum, qui à corpore pendulo descendendo & ascendendo scripti fuerint, horum differentia à vi renixus oriunda, quam literâ R significabimus, in partes tres d, d, d distribui cogitur, à tribus viribus r, r, r singulatim oriundas. Ut sit $d = d + d + d$. Ponatur autem $d = Av$, $d = Av^2$, $d = Cv^3$. Unde

efficietur id quod Newtonus poni jussit, $d = Av + Av^2 + Cv^3$. Et pro d & v numeris, quos experimenta è memoratis secundum, quartum, & sextum monstrant, ordine substitutis, venient literarum A, B, C estimationes illæ, quas Newtonus protulit.

Jam verò cum in puncto medio arcûs, quem corpus quodpiam pendulum scribat, vis renixus sit ad corporis pondus ut recta ov (in fig. Prop. xxx.) ad longitudinem fili quo corpus suspensum est; cum præterea, si talis ponatur vis renixus quæ simplici velocitatum rationi utque respondeat, ea erit ov quæ ad arcuum, qui descendendo & ascendendo confecti fuerint, differentiam rationem habeat quam 7 ad 11 (per Cor. Prop. xxx.). Hæc cum ita sint, si figura Propositionis xxx. ad vim r accommodata fuerit, erit $ov = \frac{7}{11}d$. Ac proinde ea fuerit vis r, in puncto arcûs scripti medio, quæ ad corporis penduli pondus rationem habuerit, quam $\frac{7}{11}d$, sive $\frac{7}{11}Av$ ad L (significante literâ L longitudinem fili, quo corpus suspensum erat).

At verò si talis sit vis renixus, quæ duplicatam velocitatis rationem servet, ov ea erit quæ ad arcuum, qui descendendo & ascendendo confecti fuerint, differentiam rationem habeat quam 3 ad 4. Quare si figura Prop. xxx. ad vim r accommodata fuerit, erit $ov = \frac{3}{4}d$. Ac proinde ea fuerit vis r, in medio arcûs confecti puncto, quæ ad corporis penduli pondus rationem habeat quam $\frac{3}{4}d$ sive $\frac{3}{4}Av^2$ ad L.

Rursum cum proportio rectæ ov ad AA, sive quantitas $\frac{ov}{AA}$, à lege vis renixus omnino pendeat;

et cum lex illa, quæ simplicem inter vires illas velocitatum constituat rationem, illam $\frac{ov}{AA}$ huic $\frac{7}{11}$

æqualem efficiet; altera verò lex, quæ duplicatam velocitatum rationem viribus renixus inducat, illam

Vol. II.

A a a

bantur numeri inventi, fiet resistentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0000583v + 0,0007593v^2 + 0,0022169v^3$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam; id est, ad 121 digitos. Unde cum v in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus Globi in casu secundo ut $0,0030345$ ad 121, in quarto ut $0,041748$ (°) ad 121, in sexto ut $0,61705$ ad 121.

Arcus, quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{93}$, seu $119\frac{5}{93}$ digitorum (°). Et propterea, cum radius esset 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum suspensionis & centrum Globi esset 126 digitorum; arcus, quem centrum globi descripsit, erat $124\frac{3}{11}$ (P) digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam Aëris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter, ac si Globus, descensu suo toto in Medio non resistente, describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{11}$ (°), idque in Cycloide, ad quam motum Penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati, quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere possit. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{11}$ ut arcus idem ad Penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278 (°). Quare velocitas ea ipsa est, quam corpus cadendo, & casu suo spatium 15,278 (°) digitorum

illam $\frac{ov}{aa}$ huic $\frac{1}{2}$ æqualem reddat: certe lex priorum geometricè quasi intermedia, quæ viribus re-

nixis rationem simplicis & duplicatæ velocitatum mediam induxerit, hæc illam $\frac{ov}{aa}$ talium præstiterit, quæ earum, quas priores renixus leges dabant, geometricâ ratione quasi media sit. (Id quod Emersonus ad locum rectè monuit.) Sed quantitatum $\frac{77}{2}$, quas leges priores dabant, est $\frac{1}{10}$ geometricâ ratione quasi media. Quare si figura Propositionis xxx. ad vim r accommodetur, erit $\frac{ov}{aa}$ five $\frac{ov}{d} = \frac{1}{10}$, five $ov = \frac{1}{10}d$. Ac

proinde ea fuerit vis r , in puncto medio arcus oscillando confecti, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{1}{10}d$, five $\frac{1}{10}ev^2$, ad L .

Cum igitur in medio puncto arcus, oscillando confecti, ea fuerit vis r , quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{1}{10}d$, five $\frac{1}{10}ev^2$ ad L : ea autem vis r quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{1}{10}ev^2$ ad L : ea denique vis r , quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{1}{10}cv^2$ ad L : idcirco ea fuerit vis r , è tribus r , r , r conflata, in puncto illo oscillationis medio, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{1}{10}d$, five $\frac{1}{10}ev^2 + \frac{1}{10}cv^2$ ad L .

gitorum describendo acquirere possit. Tali igitur cum velocitate Globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut $0,61705$ ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicatâ) ut $0,56752$ ad 121.

Experimento autem hydrostatico inveni, quod pondus Globi hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 fit ad 213,4 in eadem ratione, erit resistentia Globi aquei, præfatâ cum velocitate progredientis, ad ipsius pondus ut $0,56752$ ad 213,4, id est, ut 1 ad $376\frac{1}{30}$ (°). Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuatâ describat longitudinem digitorum 30,556 (°), velocitatem illam omnem in Globo cadente generare possit; manifestum est, quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere possit velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{30}$ (°), hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{30}}$ (°). Et propterea, quo tempore Globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{7}{10}$, describere possit, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{3342}$ (°).

Numerabam etiam oscillationes, quibus Pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabulâ numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripti tanquam magis accura-

2, longitudinem filii quo corpus suspensum erat. (El. v. 24.) Q. E. D.

(°) Lege $0,041778$, sicut rectè emendavit etiam Emersonus.

(°) ERAT ut opinor arcus digitorum 120, ne minimâ quidem parte major vel minor; si, quod Newtonus voluisse videtur, media ejus longitudo maximam inter minimamque sumenda sit. Cum enim arcus, quos corpus pendulum motu suo, ob aëris renixum sensim languescente, scribebat, seriem quandam arithmeticam constituerint, datâ longitudine ($\frac{2}{3}$ dig.) usque minuente, media omnium longitudo maximæ minimæque simul sumptarum semissis fuerit. At verò arcus descensus primi in experimento è memoratis sexto erat digitorum 64. Arcus igitur ascensus primi partibus $\frac{2}{3}$ unius digiti contractior. Unde arcus totus primus, idemque maximus, $128 - \frac{2}{3}$. Rursum arcus ascensus ultimi erat digitorum 56. Arcus igitur descensus ultimi partibus $\frac{2}{3}$ unius digiti longior. Arcus igitur totus ultimus, idemque minimus, $112 + \frac{2}{3}$. Primi igitur ultimique summa $128 - \frac{2}{3} + 112 + \frac{2}{3} = 240$. Atque hujus semissis ≈ 120 .

(P) 124,958.

(°) 62,479.

(°) 15,490.

(°) Lege $376\frac{1}{30}$.

(°) 30,9814.

(°) 3342.

tum, quàm cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet ^(x).

<i>Descensus primus</i>	2	4	8	16	32	64
<i>Ascensus ultimus</i>	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Numerus Oscillat.</i>	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

POSTEA Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem; sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequens prior exhibet numerum oscillationum, quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum, quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

<i>Descensus primus</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Ascensus ultimus</i>	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
<i>Numerus Oscillat.</i>	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

<i>Descensus primus</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Ascensus ultimus</i>	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Numerus Oscillat.</i>	510	518	420	318	204	121	70

In Tabulâ priore, feligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 6 respectivè, & generaliter per quantitatem v ut suprà: emerget in observatione tertiâ

(*) Nobis autem tentantibus exitus operis hujusmodi fuit; computatione utique super experimento secundo cum quarto & sexto institutâ

$A = 0,0005098$. $B = 0,0005881$. $C = 0,00025785$. Unde

	In Exp. 2.	In Exp. 4.	In Exp. 6.
r	0,0003244	0,0012976	0,0051904
r	0,0004117	0,0032936	0,0263488
ρ	0,0019340	0,0309440	0,4951040
R	0,0026701	0,0355352	0,5266432

Igitur in experimento sexto pars illa vis renixus, quæ duplicatam velocitatis rationem servabat, erat ad pondus corporis penduli ut 0,495104 ad 121.

Longitudo autem arcus, quem fili punctum illud scripsit cujus à regione Regula collocata est, digitorum erat 112. (Vide Not. °.)

Duplus finis verius dimidii arcus cycloidalis, quem globus centro oscillandi scripsisset = 26,988.

Motus globo aqueo amittendus, qui diametrum lignei Newtoniani æqualis esset, quo tempore cum velocitate æquali, quam spatium digitorum 13,494 rectâ cadendo vi proprii ponderis adeptus esset, spatium casus illius duplum, 26,988, confecerisset; motus, inquam, hoc tempore globo aqueo amittendus pars esset $\frac{1}{231}$ totius.

Motus tali globo aqueo amittendus, quo tempore eadem cum velocitate semidiametrum suam confecerisset, pars esset $\frac{1}{231}$ totius.

Illud

tertiâ $\frac{1}{193} = A + B + C$; in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$; in septimâ $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ verò æquationes reductæ dant $A = 0,001414$; $B = 0,000297$; $C = 0,000879$. Et inde prodit resistentia Globi, cum velocitate v moti, in eâ ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0,0009v + 0,000208v^2 + 0,000659v^3$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis; hæc erit ad pondus globi ut $0,000659v^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ, in experimento primo, ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{12}$ ut $0,002217v^2$ ad 121: & inde fit resistentia Globi lignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{12}$ in $0,002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in $0,000659$, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{1}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo resistentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certè permagna erat, ac de Pendulorum inventâ resistentiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quàm partem tertiam resistentiæ totius minoris Penduli; & inde didici; quòd resistentiæ Globorum, demptâ fili resistentiâ, sunt quàm proximè in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{3}$ ad 1, non longè abest à diametrorum ratione duplicatâ, $11\frac{1}{16}$ ad 1 (y).

Illud autem hæc in re minimè prætereundum judico, quòd nequeo non mirari à Newtono prætermisum: computationem, si in experimento primo, cum tertio & quinto, five horum, five eorum quæ antè memorata sunt, similem ad modum instituta fuerit, coefficientem ρ negativum promere. Nec aliter eveniet, in experimentis illis quæ in Globo plumbeo minore in Aere oscillante facta sunt, si in primo, cum tertio & quinto, vel in secundo, cum quarto et sexto utriusque eorum classis, computatio peracta fuerit.

(y) Quod si in experimento tertio, cum quinto et septimo, secundæ classis eorum quæ in hoc globo facta sunt, similis computatio instituitur, veniet $A = 0,0013066$. $B = 0,0003508$. $C = 0,0007235$. Unde vis renixus, in puncto arcus cujusque medio, ad pondus hujus globi rationem habuerit quam $0,0008316v + 0,0002457v^2 + 0,0005427v^3$ ad 121. Et pars ea hujus vis, quæ rationem velocitatis duplicatam servaverit, five pars ρ , ea fuerit ad pondus globi ut $0,0005427v^2$ ad 121. Sed in Globo ligneo, ex experimento 2°, 4°, et 6° eorum in quibus pars quarta motus extinguebatur, eam invenimus vis ρ ad pondus globi lignei rationem, quæ est $0,001934v^2$ ad 121. (Vide Not. °.) Aquis igitur globorum velocitatibus, efficitur vis ρ in globo ligneo ad vim ρ in globo plumbeo ut $0,001934 \times 57\frac{7}{12}$ ad $0,0005427 \times 26\frac{1}{4}$; hoc est ut $7,7914$ ad 1. Vel ablata utrinque parte illa renixus, quæ filo tribuenda erat, ut $7,7914 - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, hoc est ut $7,46$ ad $\frac{2}{3}$; vel ut $22,38$ ad 2; vel ut $11,19$ ad 1. Sed ratio $11,19$ ad 1 à ratione duplicatâ diametrorum $11\frac{1}{16}$, five $11,8125$ ad 1, haud longè abest.

3

Cum

Cum resistentia fili in Globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo, cujus diameter erat $18\frac{1}{4}$ digitorum. Longitudo Penduli, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, erat digitorum $122\frac{1}{2}$; inter punctum suspensionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo Penduli descensu à nodo descriptus 32 dig. Arcus ascensu ultimo, post oscillationes quinque^(z), ab eodem nodo descriptus 28 dig. Summa arcuum, seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima, seu differentia inter descensum & ascensum in oscillatione mediocri, $\frac{2}{3}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri à nodo descriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oscillatione mediocri à centro Globi descriptum; & ita differentia $\frac{2}{3}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo Penduli, manente longitudine arcus descripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augeretur, & velocitas Penduli diminueretur in ratione illà subduplicatà; maneret verò arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0,4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{4}$ ^(aa) ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista 0,4475 augeretur in duplicatà illà ratione, ideoque evaderet 1,5295^(bb). Hæc ita se habent, ex hypothesi quòd resistentia Penduli esset in duplicatà ratione velocitatis. Ergo si Pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{4}$ ^(aa) digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1,5295 digitorum^(bb). Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136^(cc). Rursus, ubi Pendulum superius ex globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod à puncto suspen-

(z) Legendum omnino D. c. m. Id quod ad locum Emersonus rectè monuit.

(aa) 124,958. Vide Not. p.

(bb) 1,55084.

(cc) $1,55084 \times 208 = 322,575$.

(d) Vide ^{aa}.

(e) Talis enim arcum scribebat Globus ligneus minor, in experimento sexto eorum quæ omnium prima memorata sunt.

* Nimium in datà fili longitudine.

(ff) Ut numeri 322,575 & 49,396 (vide Not. cc.)

(gg) Ut 0,56752 ad 0,61705. Vide suprà.

(hh) Ut 45,431 ad 49,396.

(ii) Ut 322,575 & 45,431 quam proximè.

fionis

fionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{4}$ ^(dd) digitorum; differentia arcuum descensu & ascensu descriptorum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{1}{2}}$ ^(ee); quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{12}$, producit 49,396. Duxi autem differentias hæc in pondera Globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentia oriuntur ex resistentiis, suntque ut resistentia directe & pondera inverse*. Sunt igitur resistentia ut numeri 318,136 & 49,396^(ff). Pars autem resistentia Globi minoris, quæ est in duplicatà ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0,56752 ad 0,61705^(gg), id est, ut 45,453 ad 49,396^(hh); & pars resistentia Globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentia toti; ideoque partes illæ sunt ut 318,136 & 45,453 quamproximè⁽ⁱⁱ⁾, id est, ut 7 & 1^(kk). Sunt autem Globorum diametri $18\frac{1}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{1}{4}$ sunt ut 7,438 & 1, id est, ut Globorum resistentia 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major est, quàm quæ ex fili resistentia oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterum Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfectè sphaericus, & propterea in calculo hîc allato minutias quasdam, brevitatis gratiâ, neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minimè sollicitus. Operârim itaque, cum demonstratio Vacui ex his dependeat, ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi fumantur in proportionem geometricâ, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressionem experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

(dd) — ut 7,1 ad 1] Nec alia venit ratio, si hoc idem experimentum, in Globo ligneo majore, conferatur cum sexto secundæ classis eorum, quæ in ligno minore facta sunt; quæ cum facillimè ad hunc modum conferatur. Arcus, quem globus minor, centro suo oscillandi, in sexto illo experimento, scribebat, digitorum erat $122\frac{1}{2}$ 112; hoc est 116,628. Invenitur igitur numerus (280,998) ad quem numerus ille antè inventus 322,575 rationem habeat duplicatam ejus quam 124,958 ad 116,628. Tum invenitur numerus (42,132) ad quem numerus 49,396 rationem habeat quam $\frac{28}{27}$ ad $\frac{12}{11}$. Vires renixis fuerint ut numeri 280,998; 42,132. Sed in experimento illo, de quo agitur, in globo minore, sexto urique secundæ classis eorum quæ in illo factæ sunt, vis tota æ ad partem æ erat ut 0,5266432 ad 0,495104 (vid. Not. ^{aa}). Et 0,5266432 : 0,495104 = 42,132 : 39,609. Et in Globo majore pars æ tota æ tantum non æqualis erat. Vires igitur renixis in globos ligneos, quâ parte utraque duplicatæ velocitatis rationi responderit, fuerint inter se ut numeri 280,998 : 36,609. Sed 280,998 : 36,609 = 7,1 : 1.

JAM

JAM verò conferendo resistentias diversorum Fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ; fecique ut immersa Pendula in Medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in Tabulâ sequente descripsimus; existente videlicet longitudine Penduli à puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

<i>Arcus descensu primo à puncto in filo notato descriptus, digitorum</i>	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
<i>Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum</i>	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
<i>Arcuum differentia, motui amisso proportionalis, digitorum</i>	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
<i>Numerus Oscillationum in aquâ</i>			$\frac{2}{3}$	1	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{3}{4}$	$13\frac{1}{2}$
<i>Numerus Oscillationum in aere</i>	$85\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in Aere, & $1\frac{1}{2}$ in Aquâ amissi sunt. Erant quidem oscillationes in Aere paulo celeriores quàm in Aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur, ut motus Pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{2}$ in aquâ, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam, & simul quadratum temporis diminutum, in eadem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus, motus æquales in Aere oscillationibus 535 & in Aquâ oscillationibus $1\frac{1}{2}$ amissi sunt; ideoque resistentia Penduli in Aquâ est ad ejus resistentiam in Aere ut 535 ad $1\frac{1}{2}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum, in descensu & subsequente ascensu descriptorum, à Globo in Aere cum velocitate maximâ v moto; & cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scri-

bamus

(¹¹) Sed ad partem illam vis renixus in aere definiendam, quæ duplicatam velocitatis rationem servaverit,

bamus in his casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$; & $8A + 64C = 4280$; seu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$; & $C = 64\frac{3}{4}$; & $A = 21\frac{1}{2}$: atque ideo resistentia, cum sit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$, seu $61\frac{12}{17}$, ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco resistentia Penduli in Aquâ est ad resistentiæ partem illam in Aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus considerata venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{2}$ conjunctim; id est, ut 571 ad 1 (¹¹). Si Penduli in Aquâ oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut Penduli in Aquâ oscillantis resistentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus considerata venit, sit ad resistentiam ejusdem Penduli totius, eadem cum velocitate in Aere oscillantis, ut 850 ad 1 circiter; hoc est, ut densitas Aquæ ad densitatem Aeris quàmproximè.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ Penduli in Aquâ, quæ effet ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum fortè videatur) resistentia in aquâ augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicatâ. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi; quòd arca nimis angusta effet pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis, præ angustia suâ nimis impediēbat. Nam si Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Id tentabam construendo Pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in Aquâ, superior & major proximè supra aquam filo affixus effet; & in Aere oscillando, adjuvaret motum Penduli, eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in Tabulâ sequente describitur.

servaverit, cur non hic ut antè Newtonus posuit $AV + BV^2 + CV^3 = D$? Nempè si posuisset, ex tribus illis quæ in Aere facta sunt experimentis, coefficiente A negativus prodiret.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

<i>Arcus descensu primo descriptus</i>	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
<i>Arcus ascensu ultimo descriptus</i>	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
<i>Arcuum diff. motui amisso proport.</i>	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
<i>Numerus Oscillationum</i>	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{3}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias Mediorum inter se, effeci etiam ut Pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter Globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat Globus alius plumbeus fatis magnus ad motum Penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ comuni; ut, pendulo in Fluido utroque successivè oscillante, invenirem proportionem resistentiarum: & prodit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in eâ ratione ad resistentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quòd in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine Globi immerfi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus, & in liquoribus tum Metallorum fusorum, tum aliis quibusdam, tam calidis quàm frigidis, repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis fatis liquet resistentiam corporum, celeriter motorum, densitati Fluidorum, in quibus moventur, proportionalem esse quàm proximè. Non dico accuratè. Nam Fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quàm liquidiora; ut Oleum frigidum, quàm calidum, calidum quàm Aqua pluvialis, Aqua quàm Spiritus Vini. Verùm in liquoribus, qui ad sensum fatis fluidi sunt, ut in Aere, in Aquâ seu dulci seu salâ, in Spiritibus Vini,

(mm) EX EDITIONE PRIMA.

Haftenus experimentis tñ sumus oscillantium Pendulorum, eò quòd eorum motus facilius & accuratius observari, & mensurari possint. Motus autem Pendulorum in gyrum actorum, & in orbem redeundo, circulos describuntium, propterea quòd sint uniformes, & eo nomine ad investigandam resistentiam datæ velocitati competentem longè aptiores videantur, in consiliis etiam

PRINCIPIA MATHEMATICA.

Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo à facibus per destillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam fluidi sunt, ut, in vasis agitati, motum impressum diutius conservent, effusque liberrimè in guttas decurrendo resolvantur; nullus dubito quin regula allata fatis accuratè obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus, & velocius motis, instituantur (mm).

Denique cum nonnullorum opinio sit, Medium quoddam æthereum & longè subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem Medio, per corporum poros fluente, resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an verò partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo, pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo fatis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegram rotundam, ad constituendum Pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concavâ, ut annulus, arcu suo superiore acie annexus, liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam à perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare; ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram Pendulum; dein, Pendulo demisso, notabam alia tria loca, ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quàm potui accuratissimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuum, unâ cum parte fili quæ circum pyxidemolvebatur, ac dimidio partis reliquæ, quæ inter uncum & pyxidem pen-

am adhibui. Faciendo enim ut Pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum duorum, quos primâ & ultimâ revolutione descripsit. Et inde collegi velocitates corporis sub initio & fine. Tum dicendo quòd corpus, velocitate mediocri describendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi resistentiam, quâ differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti posset; & resistentia inventa, quanquam hujus generis experimenta minùs accuratè tentare sicut, probè tamen cum præcedentibus congruebat.

B b b 2

dulam

dulam tendebatur. Nam filum tensum dimidio ponderis sui Pendulum, à perpendiculo digressum, semper urget. Huic ponderi addebam pondus Aeris, quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem Penduli, contrahebam filum, ut Penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein Pendulo ad locum primò notatum retracto ac demisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret; totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo, quòd resistentia tota pyxidis plenæ non maiorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena, ob vim suam insitam septuagies & octies maiorem vi insitâ pyxidis vacuæ, motuum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externâ, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquielocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur, erit 78 B resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ resistentia tota A+B erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam A+78 B ut 77 ad 78; & divisim A+B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A+B ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ, in partibus internis, quinque millies minor quàm ejusdem resistentia in externâ superficie, & amplius. Sic verò disputamus ex hypothesi quòd major illa resistentia pyxidis plenæ non ab aliâ aliquâ causâ latente oriatur, sed ab actione solâ Fluidi alicujus subtilis in metallum inclutum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulsum.

sum. Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quòd uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo, in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti suprà descripsimus.

SECTIO VII.

De Motu Fluidorum & Resistentiâ Projectilium.

PROP. XXXII. THEOR. XXVI.

Si Corporum Systemata duo similia ex æquali particularum numero consent, & particule correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam babeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuò quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum; neque attrahant, vel furgent se mutuò, nisi viribus acceleratricibus, quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directè: dico, quòd Systematum particule ille pergent inter se, temporibus proportionalibus, similiter moveri.

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem, in fine temporum illorum, semper sunt similes: puta si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes à particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particule correspondentes, ob similitudinem inceptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuò occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuò agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse

&

& quadrata velocitatum directè; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per legum Corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient, ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt (per Corol. 1 & 8. Prop. IV. Lib. 1.) si modò centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris, quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occurfus suos primos; & propterea similes occurfus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuò inciderint, & sic deinceps in infinitum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad Systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ Systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuò in utroque systemate respondeant, secundum lineas similiter sitas, simili cum motu, utcumque moveri incipiant: hæc similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque ideo spatia diametris suis proportionalia describere.

P R O P.

Isdem positis, dico, quòd Systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis, quibus particulæ systematum se mutuò agitant, partim ex occurribus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur; id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per hypothesin) ut quadrata velocitatum directè, & distantiae particularum correspondentium inversè, & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directè: ideoque, cum distantiae particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium systematum. Q. E. D. Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, & spatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si Systemata illa sint Fluida duo Elastica, ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia, & partibus Fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcumque projiciantur; vires autem acceleratrices,

ratrices, quibus particulæ Fluidorum se mutuò agitant, sint ut corporum projectorum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spatia similia, ac diametris suis proportionalia, describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido Projectile velox resistantiam patitur, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuò agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, resistantia foret in eadem ratione duplicatâ accuratè; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistantia est in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunt igitur Media tria A, B, C, ex partibus similibus, & æqualibus, & secundum distantias æquales regulariter dispositis, constantia. Partes Mediorum A & B fugiant se mutuò viribus quæ sint ad invicem ut r & v ; illæ Medii c ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia D, E, F, G in his Mediis moveantur; priora duo D & E in prioribus duobus A & B, & altera duo F & G in tertio C: sitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E, & velocitas corporis F ad velocitatem corporis G in subduplicatâ ratione virium r ad vires v : resistantia corporis D erit ad resistantiam corporis E, & resistantia corporis F ad resistantiam corporis G, in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea resistantia corporis D erit ad resistantiam corporis F ut resistantia corporis E ad resistantiam corporis G. Sunt corpora D & F æquavelocia, ut & corpora E & G; & augendo velocitates corporum D & F in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum Medii B in eadem ratione duplicatâ, accedet Medium B ad formam & conditionem Medii C prohibitu; & idcirco resistantiæ corporum æqualium & æquavelocium E & G in his Mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quàm data quævis. Proinde cum resistantiæ corporum D & F sint ad invicem ut resistantiæ corporum E & G, accedent etiam hæc similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D & F, ubi velocissimè moventur, resistantiæ sunt æquales quàm proximè: & propterea cum resistantia corporis F sit in duplicatâ ratione velocitatis, erit resistantia corporis D in eadem ratione quàm proximè.

Corol.

Corol. 3. Corporis in Fluido quovis Elastico velocissimè moti eadem ferè est resistantia, ac si partes Fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuò non fugerent: si modo Fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit, ut vires non habeant fatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum resistantiæ similium & æquavelocium corporum, in Medio cujus partes distantes se mutuò non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquavelocium & celerrimè motorum corporum resistantiæ, in Fluido Elastico, ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquavelocia, in Mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuò non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim (per motus Legem Tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam, quod in ejusdem densitatis Fluidis Elasticis, ubi velocissimè moventur, æquales sint eorum resistantiæ quàm proximè; sive Fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex Medii subtilitate resistantia Projectilium, celerrimè motorum, non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in Fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter se redduntur minùs liberi: resistantia, ob minorem Medii Fluiditatem, erit major quàm in superioribus Corollariis.

P R O P. XXXIV. T H E O R. XXVIII.

Si Globus ☉ Cylindrus æqualibus diametris descripti, in Medio Raro, ex particulis æqualibus ☉ ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistantia Globi duplo minor quàm resistantia Cylindri.

Nam quoniam actio Medii in corpus eadem est (per Legum *Corol.*
VOL. II. C c c

quæ sit ad vim, quâ totus ejus motus vel auferri possit, vel generari, quo tempore duas tertias partes diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

Caf. 2. Ponamus quod particulae Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus, incidendo perpendiculariter in particulas, simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quam in priore casu; & resistentia Globi erit etiam duplo minor quam prius.

Caf. 3. Ponamus quòd particulæ Medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, fed mediocri aliquâ refiliant à Globo; & refiftentia Globi erit in eadem ratione mediocri inter refiftentiam in primo cafu & refiftentiam in fecundo. O. E. I.

Corol. 1. Hinc si Globus & particulæ sint infinitè dura, & vi omni elasticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis, destituta: resistentia Globi erit ad vim, quâ totus ejus motus vel auferri possit, vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

Corol. 2. Resistencia Globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. Resistencia Globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Resistencia Globi, cæteris paribus, est ut densitas Medii.

Corol. 5. Resistencia Globi est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione densitatis Medii ^(f).

Corol. 6. Et motus Globi, cum ejus refiftentiâ, fic exponi po-
teft. Sit AB tempus, quo Globus, per refiftentiam fuam unifor-
miter

(¹) Vis renixus dicatur π . Diameter globi d . Velocitas globi c . Tempus, quo velocitate c spatium $\frac{1}{2}d$ confecerit, dicatur τ . Vis, quâ, tempore τ , motus globi, celeritate c lati, vel generari vel extingui possit, dicatur v . Densitas materiæ fluidæ dicatur ρ , globi Δ .

Jam ex hac Propositione $r : v = d : \Delta$. Quare $r = \frac{v \times d}{\Delta}$. Sed v erit ut $\frac{d^3 \times \Delta \times c}{\tau}$. Et τ erit ut $\frac{4d}{c}$. Quare v erit ut $\frac{d^3 \times \Delta \times c^2}{4d}$, hoc est ut $d^2 \times \Delta \times c^2$. Hinc autem $r (= \frac{v \times d}{\Delta})$

Datis autem d , et c , erit r ut p : quod est Quartum Newtoni Corollarium.

Et datis p et c , erit r ut d^2 : quod Tertium est Newtoni Corollarium.

Et datis d et D erit R ut c^2 : quod est Secundum Newtoni Corollarium.

(E) Modò illud intelligatur, quod satis apertum est, rectam CB ad BA rationem habere duplicatam

miter continuatam, totum suum motum amittere potest. Ad AB LIBER
erigantur perpendiculara AD, BC. Sitque BC motus ille totus, & SECUNDAUS.
per punctum c, Asymptotis AD, AB, describatur Hyperbola CF.

D
 C
 G
 F
 H
 A B E

Producat AB ad punctum quodvis E .
 Erigatur perpendicularum EF , hyperbolæ
 occurrens in F . Compleatur parallelo-
 grammum $CBEF$, & agatur AF ipsi BC
 occurrens in H . Et si Globus, tempore
 quovis BE , motu suo primo BC unifor-
 miter continuato, in Medio non resistente, describat spatium $CBEF$
 per aream parallelogrammi expositum; idem, in Medio resiste-
 nte, describet spatium $CBEF$ per aream hyperbolæ expositum, &
 motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordi-
 natam EF , amissa motûs ejus parte FG . Et resistentia ejus in fine
 temporis ejusdem exponetur per longitudinem BH , amissa resis-
 tentiæ parte CH . Patent hæc omnia per Corol. 1 & 3. Prop. v.
 Lib. II (g).

Corol. 7. Hinc si Globus, tempore T , per resistentiā R uniformiter continuatam, amittat motum suum totum M : idem Globus, tempore t , in Medio resistente, per resistentiā R in duplicatā velocitatis ratione decrescentem, amittet motus sui M partem $\frac{TM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$; & describet spatium, quod sit ad spatium motu uniformi M , eodem tempore t , descriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$: propterea quòd area hyperbolica $BCFE$ est ad rectangulum $BCGE$ in hac proportionē ^(b).

Scholium.

catam ejus, quam eadem CB habet ad EF . Namque propter hyperbolam erit CB ad EF ut AE ad AB . Et propter rectas EF , BH inter se parallelas, erit AE ad AB ut EF , BH . Quare erit CB ad EF ut EF ad BH .

(h) NEMPE si AB dicatur τ ; CB, m ; BF, t ; erit EF, pars motus reliqua, $= \frac{AB \times BC}{AE} = \frac{TM}{T \times t}$

Unde rg , pars motûs amissa, $= M - \frac{TM}{T \times t} = \frac{TM}{T \times t}$

Rursum, si pro Modulo logarithmorum ex hyperbolâ cf, ponatur 1, et \mathfrak{B} pro Modulo Briggiano, erit CBEF ad logarithmum numeri $\frac{\mathfrak{T} \times \mathfrak{X}}{\mathfrak{T}}$ Briggianum ut 1 ad \mathfrak{B} . Unde $\text{CBEF} =$

Log. $\frac{T \times I}{T} \times \frac{I}{R}$. Sed $\frac{I}{R} = 2,302585092994$, vid. Cotel. Harmon. Mens. Prop. II. Quare CBEF =

Vol. II.

D d d

Log.

Scolium.

In hac Propositione exposui refitentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis; & ostendi, quòd hæc refitentia sit ad vim, quâ totus Globi motus vel tolli possit, vel generari, quo tempore Globus duas tertias diametri suæ partes velocitate uniformiter continuatâ describat, ut densitas Medii ad densitatem Globi, si modò Globus & particulæ Medii sint summè elastica, & vi maximâ reflectendi polleant: quòdque hæc vis sit duplo minor, ubi Globus & particulæ Medii sunt infinitè dura, & vi reflectendi prorsus destituta. In Mediis autem Continuis, qualia sunt Aqua, Oleum calidum, & Argentum Vivum, in quibus Globus non incidit immediatè in omnes Fluidi particulas refitentiam generantes, sed premit tantum proximas particulas, & hæc premunt alias, & hæc alias; refitentia est adhuc duplo minor. Globus utique, in hujusmodi Mediis fluidissimis, refitentiam patitur, quæ est ad vim, quâ totus ejus motus vel tolli possit, vel generari, quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas Medii ad densitatem Globi. Id quod in frequentibus conabimur ostendere.

P R O P. XXXVI. P R O B. VIII.

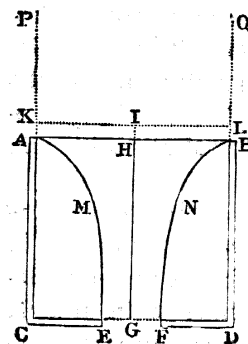
Aquæ de vase Cylindrico, per foramen in fundo factum, effluentis definire motum (i).

Sit ACDB vas Cylindricum; AB, ejus orificium superius; CD fundum horizonti parallelum; EF, foramen circulare in medio fundi; G centrum foraminis; & GH, axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge Cylindrum glaciei APQB ejusdem esse latitudinis cum cavitate vasis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo descendere; & partes ejus, quàm primum attingunt superficiem AB, liquefcere, & in aquam conversas, gravitate suâ defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ ABNFEM cadendo formare, & per foramen EF transire, idemque adæquatè

Log. $\frac{T \times f}{T} \times 2,302585092994$. Rectangulum autem BG = TM. Sed propter AB x BC, five TM, = I

erit M = $\frac{1}{T}$. Quare BG = $\frac{f}{T}$. Quare CBEF : BG = Log. $\frac{T \times f}{T} \times 2,302585092994 : \frac{f}{T}$

implere.



implere. Ea verò sit uniformis velocitas Glaciei descendens, ut & Aquæ contiguæ in circulo AB, quam aqua, cadendo & casu suo describendo altitudinem IH, acquirere potest; & jaceant IH & HG in directum, & per punctum I ducatur recta KL horizonti parallela, & lateribus Glaciei occurrens in K & L. Et velocitas aquæ, effluentis per foramen EF, ea erit, quam aqua, cadendo ab I & casu suo describendo altitudinem IG, acquirere potest. Ideoque, per Theorema Galilei, erit IG ad IH in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB; hoc est, in duplicatâ ratione circuli AB ad circulum EF; nam hi circuli sunt reciproci ut velocitates aquarum quæ per ipsos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè transeunt. De velocitate aquæ horizontem versus hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hîc non consideratur. Supponimus quidem, quòd partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæsiōnem suam, inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos; ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: sed motum horizonti parallelum, à cohæsiōne illâ oriundum, hîc non consideramus.

Cas. I. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis ABNFEM, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem, tanquam per infundibulum, transeat. Et si aqua glaciem tantum non tangat; vel, quod perinde est, si tangat, & per glaciem, propter summam ejus polituram, quàm liberrimè & sine omni refistentiâ labatur; hæc defluet per foramen EF eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ ABNFEM impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

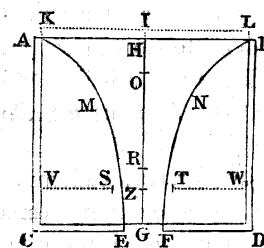
(i) Locum hunc de motu Aquarum, quæ à vase cylindrico, tenui foramine pertuso, profluunt, multis tractârunt Jurinus in Actis Philosophicis, Maclaurinus in præclaro suo Opere de Fluxionibus, D. Bernouillius in Hydrodynamica, et Polenus.

Liquefeat jam glacies in vase; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere, nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui sit æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quàm prius. Nam particularæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter; sed à lateribus vasis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; & cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quàm in ipso foramine; existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quàm proximè, si modò diametros rectè dimensus sum. Parabam utique laminam planam, pertenuem, in medio perforatam; existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur, & acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis affixi; sic ut vena illa egrederetur secundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum esset, aperui foramen, ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti à foramine, quàm accuratissimè mensurata prodiit partium viginti & unius quadragesimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quàmproximè. Aqua igitur, transeundo per foramen, convergit undique; & postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo; & per attenuationem acceleratur, donec ad distantiam semissis digiti à foramine pervenerit, & ad distantiam illam tenuior & celerior fit, quàm in ipso foramine, in ratione 25×25 ad 21×21 , seu 17 ad 12, quàmproximè; id est in subduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. Per experimenta verò constat, quòd quantitas aquæ, quæ, per foramen circulare in fundo vasis factum, dato tempore effluit, ea sit, quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, sed per foramen circulare, cujus diameter est ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem ha-

bet deorsum, in ipso foramine, quam grave cadendo, & casu suo describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quamproximè. Sed postquam exivit ex vase, acceleratur convergendo, donec ad distantiam à foramine diametro foraminis propè æqualem pervenerit, & velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quamproximè.

In frequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus, quod vocavimus EF. Et plano foraminis EF parallelum duci intelligatur planum aliud superius, vw, ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter, & foramine majore st per-tusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius, EF, atque ideo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio Problematis postulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio Problematis simplicior sit & magis mathematica,



præstat adhibere planum solum inferius
 pro fundo vasis, & fingere quòd Aqua,
 quæ per Glaciem, ceu per infundibulum,
 defluebat, & è vase per foramen EF in
 plano inferiore factum egrediebatur, mo-
 tum suum perpetuò servet, & Glacies
 quietem suam. In sequentibus igitur sit
 ST diameter foraminis circularis, centro
 z descripti, per quod cataracta effluit ex vase, ubi aqua tota in
 vase fluida est. Et sit EF diameter foraminis, per quod cataracta
 cadendo adæquatè transfit, sive Aqua exeat ex vase per foramen il-
 lud superius ST, sive cadat per medium Glaciei in vase tanquam
 per infundibulum. Et sit diameter foraminis superioris ST ad
 diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & distantia per-
 pendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro forami-
 nis minoris EF. Et velocitas aquæ, è vase per foramen ST exe-
 untis, ea erit in ipso foramine deorsum, quam corpus cadendo à
 dimidio

dimidio

nam circulus EF est ad circulum AB in subduplicatâ ratione altitudinis IH ad altitudinem IG, hoc est, in simplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG : & quo tempore gutta, cadendo ab I, describere potest altitudinem IH, aqua egrediens æqualis erit Cylindro, cujus basis est circulus AB, & altitudo est 2IH : & quo tempore gutta, cadendo ab I per H ad G, describit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, id est, aqua tota in Solido ABNFEM, æqualis erit differentię Cylindrorum ; id est, Cylindro cujus basis est AB, & altitudo 2HO. Et propterea aqua tota in vase ABDC est ad aquam totam cadentem in Solido ABNFEM ut HG ad 2HO, id est, ut HO+OG ad 2HO, seu IH+IO ad 2IH. Sed pondus aquæ totius, in Solido ABNFEM, in aquæ defluxum impenditur : ac proinde pondus aquæ totius in vase est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut IH+IO ad 2IH ; atque ideo ut summa circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

Coral. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vase $ABDC$ est ad ponderis partem alteram, quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum AB & EF ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum AB & EF ad duplum circulum minorem EF, sive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad summam circulorum AB & EF; five ut circulus AB ad excessum dupli circuli AB supra fundum. Nam ponderis pars, qua solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum AB & EF ad summam eorundem circulorum, per Cor. 4 : & pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circulorum AB & EF. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad summam circulorum AB & EF, vel excessum dupli circuli AB supra fundum (k).

Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur circellus PQ , centro

(^k) Sextum hoc Corollarium à Cotesio est.

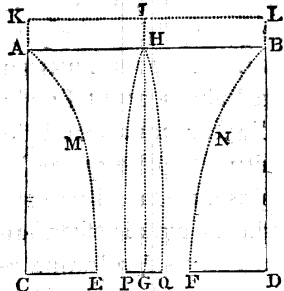
¶ defcriptus, & horizonti parallelus: pondus aquæ, quam circellus ille fuftinet, majus eft pondere tertię partis Cylindri aquæ, cujus bafis eft circellus ille, & altitudo eft GH. Sit enim ABNFEM cataracta, vel columna aquæ cadentis axem habens GH ut fuprà;

& congelari intelligatur aqua omnis in vase, tam in circuitu cataractæ quàm supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et fit PHQ columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens H, & altitudinem GH. Et finge cataractam hancce pondere suo toto cadere, & non incumbere in PHQ, nec eandem premere, sed liberè & sine fritione præterlabi; nisi fortè in ipso Glaciei vertice, quo cataracta, ipso cadendi initio, incipiat esse cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata, AMEC, BNFD, convexa est in superficie internâ, AME, BNF, versus cataractam cadentem, sic etiam hæc columna PHQ convexa erit versus cataractam; & propterea major Cono, cujus basis est circellus ille PQ, & altitudo GH; id est, major tertiâ parte Cylindri eâdem base & altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ; id est, pondus, quod pondere Coni, seu tertiæ partis Cylindri illius, majus est.

VOL. II.

E e e

infinite



autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ, quam circellus valdè parvus, PQ, sustinet, æquale est ponderi Cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$ quamproximè. Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera Coni & Hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valdè parvus, sed augeatur, donec æquet foramen EF; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est GH.

Corol. 10. Et (quantum sentio).⁽¹⁾ pondus, quod circellus sustinet, est semper ad pondus Cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille, & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, ut EFq ad EFq - $\frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissimæ circelli PQ quamproximè.

L E M M A

⁽¹⁾ - quantum sentio.] Nimirum proportio ponderum, quam in hoc Corollario Newtonus constituit, ita obtinebit, si is sit motus aquæ per rimam annularem, quam circulus PQ, in medio foramine EF collocatur, circa se relinquit, quo per eandem rimam è vase cylindraceo ea profluat, quod basin haberet circulum EF, altitudinem rectæ GH æqualem. Quod sic ostendimus.

Tantilla ponatur circuli PQ superficies, ut foraminis totius EF pars sit multesima. Sustinebit igitur vim, quæ ponderi Cylindri aquei, cujus basis circulus ille PQ, altitudo dimidia rectæ GH, æqualis erit. Manente circulo PQ, contrahatur sensim foramen EF, quo datam circuli PQ magnitudinem paulatim accedat. Sit v linea recta eà lege mutabilis, ut in omni magnitudine foraminis EF, illa v ad datam quandam rationem habeat, quam vis, quæ premitur circulus PQ, ad pondus Cylindri aquei, cujus basis PQ altitudo $\frac{1}{2}GH$. Dico v esse semper ad P ut EF² ad EF² - $\frac{1}{2}PQ^2$, modò is sit aquarum, per rimam EPQF profluentium, motus, quo per eandem rimam è vase cylindraceo, cujus basis EF, altitudo GH, prorumperent. Aquæ enim per rimam illam è tali vase profluente, vis quæ fundus ejus vasis premitur, erit ad pondus Cylindri aquei, qui in eodem vase fundum ad perpendicularum insidit, ut EF² ad EF² + EF² - PQ², hoc est ut EF² ad 2EF² - PQ² (per Cor. 6.) Jam verò cum v sit ad P ut vis, quæ aquæ premant circulum PQ, ad pondus Cylindri aquei PQ x $\frac{1}{2}GH$; cum præterea pondus hujus Cylindri sit ad pondus Cylindri aquei, cujus basis circu-

L E M M A IV.

Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentiâ Circuli eâdem diametro descripti, & eâdem velocitate secundum lineam rectam, plano ipsius perpendiculararem, progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minimè opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in Circulum vertitur.

P R O P. XXXVII. T H E O R. XXIX.

Cylindri, qui in Fluido compresso infinito, & non elastico, secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri quamproximè.

Nam si vas ABDC fundo suo, CD, superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum EFTS, horizonti perpendiculararem, in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus PQ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur CA ad K, ut sit AK ad CK in duplicatâ ratione, quam habet excessus orificii canalis EF supra circellum PQ ad circulum

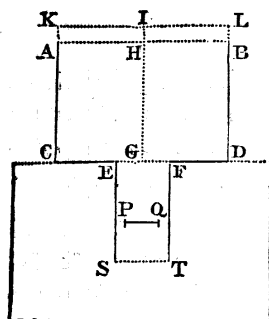
ius idem PQ altitudo tota recta GH, ut 1 ad 2: erit v ad 2P ut vis, quâ aquæ premunt circulum PQ, ad pondus Cylindri aquei qui in vase cylindraceo, quale posuimus, circulum PQ ad perpendicularum insidit; hoc est ut EF² ad 2EF² - PQ². Est autem 2EF² - PQ² ad EF² - $\frac{1}{2}PQ^2$ ut 2 ad 1, hoc est ut 2P ad P. Cum igitur sit v: 2P = EF²: 2EF² - PQ². Et 2P:P = 2EF² - PQ²: EF² - $\frac{1}{2}PQ^2$; ex æquo erit v:P = EF²: EF² - $\frac{1}{2}PQ^2$. Q. E. D.

Habes, ni fallor, firmissimam hujus Corollarii probationem, modò vera sint ea quæ in novem superioribus et in ipsâ Propositione xxxvi. allegata sunt, atque illud præterea concesseris, motum aquarum, è vase cylindraceo amplissimo, ACDS, per rimam tenuissimam, EPQF, profluentium, eundem fore, quo ex angustissimo ejusdem altitudinis, quod basin circulum EF haberet, per eandem rimam fluere. Illud autem Newtonus cum per experimenta non satis exploratum haberet, idcirco istud suum quantum sentio, ut opinor, interposuit. Cæterum hujus Corollarii rationes in sexto positas esse, è literis quibusdam Cotesii ad Newtonum primum intellexi. In quibus Cotesius, postquam sextum illud Corollarium exposuerit, hæc subiungit. "Hoc Corollarium lucem aliquam tuo in Corollario decimo quantum sentio offundere possit."

Sed ne quid dissimulem, cum iis suffragium fero, qui hanc Propositionem xxxvi. cum decem quæ ei comitantur, Corollariis, suspectam habent.

E e e 2

A B :



AB : manifestum est (per Caf. 5. Caf. 6. & Cor. 1. Prop. xxxvi.) quod velocitas aquæ, transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit, quam aqua cadendo, & casu suo describendo altitudinem KC, vel IG, acquirere potest.

Et (per Corol. 10. Prop. xxxvi.) si vasis latitudo sit infinita, ut lineola HI evanescat & altitudines IG, HG æquen-

tur : vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proximè. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ, in quâcunque canalís parte locatum.

Claudantur jam canalís orificia EF, ST, & ascendat circellus in Fluido undique compresso, &, ascensu suo, cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalís : & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ ; & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis, quâ præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, sive ut $EFq - PQq$ ad EFq . Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ suprà ostensum est aquam transire per idem spatium annulare, dum circellus interea immotus manet ; id est, velocitati, quam aqua, cadendo, & casu suo describendo altitudinem IG, acquirere potest : & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac priùs (per Legum Corol. v.) id est, resistentia circelli ascendentis erit ad pondus Cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille

(^m) Hæc demonstratio à Cotesio tæta est. Cùm verò tota posita est in Propositione superiore, cujus doctrinam multi suspectam habuere, et in Corollario ejus decimo, quod vel ipse Newtonus non nisi dubitanter allegavit, rem Physicis ut opinor haud ingratam fecero, si Viri Clarissimi Henrici Pemberton Propositiones duas, quæ in manus fortè nostras pervenerunt, in lucem emisero. Quarum ope quæ Newtono in hac Propositione tradita sunt, de vi renixus, quâ liquores compressi ad motus corporum resinguentes polleant, ea subtilissimis quidem, eisdem verò quàm maximè perspicuis, rationibus confirmantur ; nullâ suspectæ Propositionis xxxvi. ratione habitâ. Sanè quæ super quæstione gravissimâ, et è difficillimis unâ, quæ in Physicis tractari solent, tanto viro tam feliciter sunt elucubrata, apud nos premere & abscondere piaculum esset.

ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quamproximè. LIBER
SECUNDUS. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua, cadendo, & casu suo describendo altitudinem IG, acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq .

Augeatur amplitudo canalís in infinitum : & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq , interque EFq & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimò ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit, quam aqua, cadendo & casu suo describendo altitudinem IG, acquirere potest ; resistentia verò ejus æqualis evadet ponderi Cylindri, cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis IG, à quâ Cylindrus cadere debet, ut velocitatem circelli ascendentis acquirat ; & hæc velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem Cylindri, hæc velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentiâ circelli (per Lemma iv.) ideoque æqualis est vi, quâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, generari potest quamproximè.

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur : motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis suæ describit, augebitur vel minuetur in eadem ratione ; ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli possit, non mutabitur ; ac proinde etiamnum æqualis est resistentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma iv.

Si densitas Cylindri augeatur vel minuatur : motus ejus, ut & vis, quâ motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Resistentia itaque Cylindri cujuscunque erit ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri quamproximè. Q.E.D. (^m)

Fluidum

HENRICI PEMBERTONI

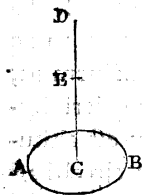
DE VI RENIXUS IN LIQUORIBUS COMPRESSIS PROPOSITIONES.

PROPOSITIO PRIMA. THEOREMA.

Aquâ, vel alio quovis Liquore, dato quovis foramine cum velocitate quâlibet æquali prorumpente, quantitas motus in liquore illo, qui dato quovis tempore effluxerit, ejus æqualis erit, quam vis gravitatis eodem tempore generaverit, in mole quâdam ejusdem liquoris sive Cylindricâ sive Prismaticâ, quæ basem illud

Fluidum autem comprimi debet, ut sit continuum: continuum vero esse debet, & non elasticum, ut pressio omnis, quæ ab ejus compressione

illud ipsum foramen habeat, quo liquor prorumpit, altitudinem vero ejus altitudinis duplam, à quâ si grave cadat velocitatem adeptum erit æqualis illius, quâ liquor profluit, æqualem.



Sit æ foramen illud quo Liquor profluit; eo spatium quod corpus, rectâ progrediendo, eâ cum velocitate quâ liquor fertur, dato tempore τ confecerit. Ponatur eæ altitudini æqualis, à quâ si grave cadat, velocitatem eam, quæ profluentis est liquoris, adeptum erit. Ac primum, datum tempus τ illud ipsum sit, quo corpus, rectâ cadendo, spatium eæ confecerit. Erit igitur longitudo eo illius eæ dupla. At vero Liquor omnis, qui dato tempore, τ , foramine AB proflexerit, Cylindri vel Prismatis, qui pro base foramen illud AB habeat, altitudinem ipsam eo, mole suâ æqualis erit; hoc est Cylindri vel Prismatis qui basem habeat AB, altitudinem duplam rectæ eæ. Et velocitas profluendi eadem est, quam vis gravitatis tempore casus recti per eæ, hoc est dato tempore τ , generaverit. Motus igitur Cylindri ejus vel Prismatis, itâ cum velocitate profluentis, is erit, quem in eodem Cylindro vel Prismate vis gravitatis, eodem tempore τ , generaverit. Nimirum cum tantundem fuerit materiæ motæ eademque velocitas.

Jam vero tempus datum τ , aliud sit ab illo, quo corpus grave, casu recto, spatium eæ confecerit. Nihilominus illud omne liquoris, quod foramine AB, dato tempore τ , proflexerit, Cylindri vel Prismatis qui basem AB, altitudinem illam eo habeat, mole suâ æquale erit. Et illud omne quod tempore casus recti per eæ proflexerit, mole itidem suâ, Cylindri vel Prismatis qui basem habeat AB, altitudinem 2eæ, æquale erit. Unde illud omne liquoris, quod dato tempore τ proflexerit, ad illud omne quod proflexerit tempore casus recti per eæ, rationem habebit quæ eo ad 2eæ. Sed et tempus datum τ ad tempus casus recti per eæ rationem habet quæ eo ad 2eæ; nimirum cum illa eo, 2eæ sint spatia temporibus illis, pari velocitatis gradu, æqualiter confecta. Velocitates autem, quas vis gravitatis temporibus diversis generat, sunt semper inter se ut tempora, quibus generantur. Velocitas igitur, quam vis gravitatis dato tempore τ generaverit, ad velocitatem quam tempore casus recti per eæ generaverit, hoc est ad liquoris profluendi velocitatem, rationem habebit quæ eo ad 2eæ. Cum igitur liquoris illud omne, quod foramine AB dato tempore τ proflexerit, ad illud omne quod ejusdem liquoris Cylindrus vel Prisma in se contineret, cujus basis AB, altitudo dupla illius, à quâ grave cadendo liquoris profluentis velocitatem adeptum esset; cum inquam, moles illa liquoris, dato tempore τ profusa, ad hanc alteram ejusdem liquoris molem rationem habeat, quæ eo ad 2eæ, hoc est quæ velocitatem dato tempore τ à gravitate generanda ad ipsam profluendi velocitatem; motus utique liquoris, qui dato tempore τ proflexerit, illius æqualis erit, quem vis gravitatis dato tempore τ in mole illâ alterâ Cylindraceâ vel Prismaticâ generaret. Nimirum propter materiæ quantitates velocitatum rationibus contrariè respondentes. Q. E. D.

Cor. 1. Vis quâ liquor foramine dato AB prorumpat, æqualis erit ponderi molis ejusdem ejusdem liquoris, sive cylindraceæ sive prismaticæ, quæ basem AB, altitudinem vero ejus altitudinis duplam habeat, à quâ si grave cadat velocitatem adeptum erit æqualis illius, quâ liquor profluit, æqualem. Namque cum æquales semper sint motus, quos vis ponderis hujus Cylindri vel Prismatis, visque, quâ liquor per foramen propellitur, eisdem temporibus generaverint, vires utique genetrices inter se æquales erunt.

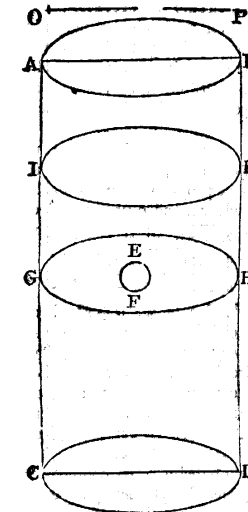
Cor. 2. Motus varii, quos liquor, si dato foramine variis cum velocitatibus proflexerit, temporibus æqualibus generaverit, ii rationem inter se velocitatum duplicatam gerent. Namque motus illi sunt iidem, quos vis gravitatis, dato tempore profluendi, in Cylindris vel Prismatis liquoris profluentis generaverit, qui pro basi foramen datum communiter omnes habeant, altitudines earum singularem duplas, à quibus gravia si cadant velocitates adeptæ erunt earum, quibuscum liquor profluere intelligitur, æquales. Sed motus, quos vis gravitatis in corporibus diversis dato tempore generat, quantitatum materiæ in eisdem rationem gerunt; quæ corporum ipsorum ratio erit, si ex simili materiâ constant. Corpora autem illa, Cylindracea vel Prismatica, ex simili materiâ constant, et altitudinum inter se rationem gerunt. Quare motus de quibus agitur, erunt inter se sicut Cylindrorum istorum vel Prismatum altitudines. Altitudines autem illæ, secundum Doctrinam Galilæi, duplicatam velocitatum rationem gerunt. Quare et motus de quibus agitur duplicatam inter se velocitatum rationem servant.

PROPO-

compressione oritur, propagetur in instanti, & in omnes moti LIBER
corporis partes æqualiter agendo, resistentiam non mutet. Pref-
SECONDVS.
fio

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

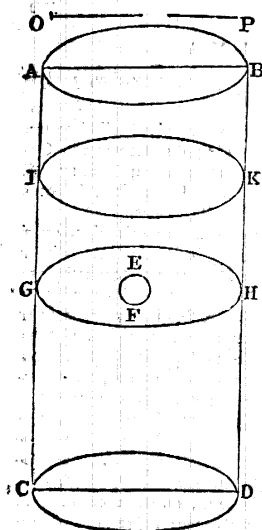
Invenire vim remissâ in Liquore quovis Compresso, ad motum corporis Cylindracei resingendum, quod secundum axis sui directionem per liquorem illum progrediatur.



Putâ istiusmodi Liquorem aliquem per canalem cylindraceum ACDB, cum velocitate æquabili, secundum directionem axis Cylindri ferri. Tum in hoc canali ponatur circulus quidam EF, tali situ ut cum basibus canalâ parallelus sit. His positâ, impetus liquoris in hunc circulum videamus quifnam erit.

Nempe Liquor, qui, dum nullus erat in canali circulus, omni parte æqualiter progrediebatur, nunc incitatus feretur inter latera canalâ et circulum, quâ ubi circulum nondum attigerit: eâ quidem ratione, quâ canalâ basis spatium illud inter latera canalâ et circulum exsuperaverit. Quare si canalâ plano æh per circulum secetur, alioque IK quod cum priore parallelum sit, ab eâ parte unde cursus sit liquoris; velocitas liquoris in spatio GEHF ad velocitatem ejus in plano IK rationem habebit eam, quam circulus IK ad spatium GEHF. Atqui major illa liquoris velocitas, inter circulum et latera canalâ, argumento est, partem liquoris illam, quæ circulum præterlabitur, vi aliquâ à partibus ulterioribus propelli. Unde hæ vicissim ab illâ repellentur. Uade sequetur, liquorem inter circulum & latera canalâ velocius, antequam circulum, ut in plano IK, tardius ferri, quàm si circulus in canali nullus esset; licet ab eadem vi externâ, sive addit circulus, sive ille abât, moles liquida incitetur. Quin et major liquoris in spatio GEHF velocitas ad minorem ejus in plano IK velocitatem eam necesse est rationem habeat, quæ efficiat, ut decrementum motus, dato tempore genitum, in liquore qui per circulum IK proflexerit, æquale sit incremento motus, eodem tempore genito, in liquore illo qui per spatium GEHF evaserit. Verum hunc in finem velocitas quæ, absente circulo, liquoris fuerit, ea velocitatum quando addit circulus, in plano IK, & in spatio GEHF, inæqualium, proportionem media esse debet. Ita enim, quoniam velocitas in spatio GEHF ad velocitatem in plano IK, quando addit circulus, rationem habet quæ circulus IK ad spatium illud GEHF; circulus utique IK ad spatium GEHF rationem habebit duplicatam ejus, quam velocitas liquoris in spatio GEHF ad primariam ejus, qualis absente circulo ea fuerit, velocitatem; necnon duplicatam ejus quam velocitas hæc liquoris primaria, ad imminutam ejus, adveniente circulo EF, in plano IK velocitatem. Circulus igitur IK erit ad spatium GEHF, ut motus, dato quovis tempore in liquore illo genitus, qui, circulo EF in medio canali posito, per spatium GEHF evaserit, ad motum eodem tempore generandum in liquore, qui, absente circulo, cum primariâ suâ velocitate per idem spatium GEHF profluxisset. (Prop. I. Cor. 2.) Sed ut circulus IK ad spatium GEHF, ita erit motus dato tempore in liquore illo omni generandus, qui cum primariâ velocitate per circulum IK profluxisset, ad motum, eodem tempore, in eâ liquoris ejus parte generandum, quæ, cum eadem velocitate, per spatium GEHF profluxisset. Motus igitur, dato tempore genitus, in liquore illo, qui per spatium inter circulum EF, in medio canali posito, et latera canalâ evaserit, ei æqualis erit, qui, absente circulo EF, in liquore, cum primariâ suâ velocitate per circulum IK profluente, eodem tempore generatus esset. (El. v. 9.) Rursum cum circulus IK ad spatium GEHF rationem habeat duplicatam ejus, quam velocitas liquoris primaria ad imminutam ejus in plano IK velocitatem (id enim antè ostensum fuit) eam utique habebit circulus ille IK ad spatium GEHF quam motus, dato tempore in liquore generandus, qui cum primariâ velocitate, absente circulo EF, per circulum IK profluxisset, ad motum eodem tempore genitum in liquore illo, qui, circulo EF in medio canali posito, per eundem circulum IK tardius proflexerit. (Prop. I. Cor. 2.) Sed ut circulus IK ad spatium GEHF, ita erit motus dato tempore in liquore illo omni generandus, qui, circulo EF absente, per circulum IK cum primariâ velocitate profluxisset, ad motum eodem tempore in eâ liquoris ejus parte generandum,

fio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium



inquam, liquoris, cui circulus EF, in medio canali positus, per IK transitum negaverit, ad hanc alteram molem rationem habebit quam M^2 ad $M \times N + N^2$; five eam, quam basis canalis ad illud habet quo circulus EF ipsa basis exsuperat, unâ cum illo quod hujus exsuperantiæ et ipsius basis proportionem medium est. Namque prior moles ad alteram rationem habebit, quæ componitur è ratione velocitatis, in plano IK extinctæ, ad velocitatem in illo plano supersistentem (hoc est è ratione $O-P$ ad P), cum ratione basis canalis ad circulum EF; hoc est cum ratione ipsius M^2 ad $M^2 - N^2$. Verùm ex eisdem rationibus composita est ratio solidi $M^2 \times O-P$ ad $M^2 - N^2 \times P$; five quadrati ex M ad spatium $MN + N^2$.

Hæc erit Circuli immobilis efficientia ad sistendum Liquoris cursum. Deinceps disquiramus, quænam Liquoris futura sit ad impediendum Circuli motum, si ille secundum axem canalis propellatur.

Quoniam ea erat Circuli EF immobilis efficientia, quæ se ad liquoris cursum obijciendo, molem ejus, quæ dato tempore per canalē circulum quemvis IK profueret, minorem redderet; si circulus ille EF vim omnem molis ejus liquidæ sustinuisset, cujus corpuscula ad perpendicularum ei illidebantur, omnem utique eorum corpusculorum motum extinxisset, simul atque eā in eum impingerentur. Unde liquoris moles, cui circulus iste transitum per IK dato quovis tempore negasset, ea fuisset, quæ parte quavis circuli IK ipsi EF æquali, eo tempore, profueret. Unde circulus ipse EF vim sustinuisset ejus æqualem, quā liquor aliquis, ejus similis quem in canali ponimus, tali foramine prorumpat; five eam, quæ ponderi columnæ cujusdam ejus liquoris cylindraceæ æqualis esset, quæ basem haberet circulum EF, altitudinem verò duplam illius, à quā si grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius æqualem, quācum liquor in Canali per IK profuebat. (Prop. I. Cor. 1.) Verùm minor erat liquoris moles, cui circulus EF transitum negabat; siquidem M^2 minus fuerit quàm $MN + N^2$, modò circulus EF prælatitudine canalē perexiguus sit. Liquor igitur, qui in circulum EF illidebatur, eā duntaxat velocitatis suæ parte eum urgebat, cujus extinctione minor illa moles liquida, cui circulus EF transitum negabat, retinenda et cursu sistenda erat. (Prop. I. Cor. 2.) Vis, quam circulus ille EF immotus sustinebat, ad pondus columnæ liquoris, cujus diximus, cylindraceæ rationem habuerit ejus duplicatam, quam basis Canalē ad illud quo basis circuli EF exsuperet, unâ cum illo quod ejus exsuperantiæ et ipsius basis proportionem medium sit.

Claudatur jam canalē; & in liquore undique compresso et stagnante, puta circulum EF, secun-

dum, quæ cum eadem velocitate per spatium GEHF profuisset. Motus igitur, dato tempore genitus, in liquore, qui, circulo EF in medio canali posito, per circulum totum IK cum imminutâ velocitate profuisset, æqualis erit ei, qui, circulo EF absente, eodem tempore in liquore genitus esset cum primariâ suâ velocitate per spatium GEHF profuente. (El. v. 9.) Ex hisce verò sequitur, quantum motus liquoris in circulo IK decesserit, circulo utique EF in medio canali posito, tantundem ei in spatio GEHF, inter circulum EF et latera canalē, restitui. Etenim quando motus in toto circulo IK in eum minuerit, qui, si abesset circulus EF, in spatio minore GEHF esset, tum motus in minore illo spatio GEHF in eum increverit, qui antè in toto circulo IK fuerat.

Jam sit basis canalē, five circulus IK, ad spatium GEHF ut M^2 ad N^2 . Sit etiam O ad P ut velocitas liquoris primaria ad minorem eam liquoris per circulum IK profuentis, quando addit circulus EF in medio canali. Erit igitur P ad O ut N ad M , et P ad $O-P$ ut N ad $M-N$, five ut $N \times M + N$ ad $M^2 - N^2$. Solidum igitur $P \times M^2 - N^2$ Solido $N \times M + N \times O-P$ æquale erit; et $M^2 - N^2 \times P$ erit ad $M^2 \times O-P$ ut $N \times M + N \times O-P$ ad $M^2 \times O-P$; hoc est ut $N \times M + N$ ad M^2 , five ut $M \times N + N^2$ ad M^2 . Hinc omnis illa liquoris moles, cui circulus EF, in medio canali positus, transitum per IK dato quovis tempore negaverit; hæc ad molem illam, quæ, ut obfistat circulus EF, parte tamen quavis plani IK circulo EF æquali, eodem tempore profuisset: moles,

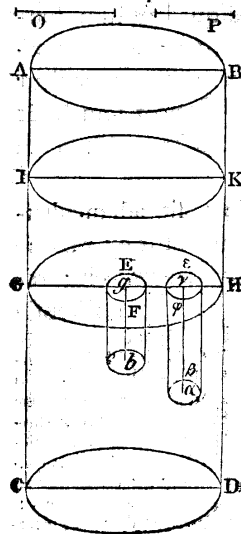
partium Fluidi generandum, & resistentiam creat. Pressio autem LIBER
SECUNDUS.

quæ

dum directionem axis canalē cylindracei ACDB, versus IK incitari. Circulus, movendo, Liquori aliter immoto motum dabit; qui talis erit, ut velocitas liquoris, circulo cedentis, quācum inter circulum & latera canalē feretur, ad circuli ipsius velocitatem rationem habeat, quam area circuli ad spatium GEHF. Quapropter hæc velocitates simul sumptæ, five velocitas illa omnis, quācum liquor et circulus se mutuò præterlabuntur, ad solam circuli velocitatem, five ad eam quācum partes liquoris posteriores ad circulum admoventur, rationem habebit quam tota basis Canalē ad spatium GEHF. Hinc motus liquoris, Circuli ratione, idera profus erit, qui antè erat; quando, Circulo immoto, Liquor proprio motu in eum impetum faciebat. Igitur Circulus eam percipiet vim renixus, quæ æqualis erit ponderi columnæ cujusdam Liquoris cylindraceæ, quæ basem habeat circulum EF, altitudinem verò, quæ ad duplam illius, à quā si grave cadat velocitatem circuli adeptum erit, rationem habeat duplicatam ejus, quæ est circuli GH ad spatium GEHF unâ cum illo, quod circuli GH et spatii GEHF proportionem medium est. Atqui ratio illa duplicata, si amplitudo canalē infinitè augeatur, ultimò unitatis ad quaternarium erit. Et vis, quam Circulus percipiet, æqualis fiet ponderi cylindraceæ cujusdam Liquoris columnæ, quæ basem Circulum ipsum habeat, altitudinem verò ejus altitudinis dimidiam, à quā si grave cadat velocitatem circuli adeptum erit.

Universè vis renixus in Circulum ea erit, quæ ad pondus cylindraceæ cujusdam liquoris columnæ, cujus basis circulus ipse, altitudo dimidia ejus à quā si grave cadat velocitatem circuli adeptum erit, rationem habeat ejus rationis duplicatam, quam dupla basis canalē habet ad illud quo basis illa circulum exsuperet, unâ cum illo quod exsuperantiæ illius & ipsius basis proportionem medium sit."

Hæc ferè Pembertonus; nisi quòd nonnulla, quæ nimis breviter eum dixisse existimavimus, nos, Latine convertentes quæ ille Anglicè scripserat, explicatius dicere conati sumus. Ex his autem illud facile comprobari possit, quod Newtonus in Propositione suâ xxxvii. constituere voluit, de vi renixus quâ pollerent Liquores Compressi. Quorum moles infinitæ essent, ad motum corporis cujusvis Cylindracei restringendum, quod secundum axem sui directionem in tali liquore progredere- tur. Ea nempe illa vis renixus erit, quæ ad vim aliam, quæ totum corpus Cylindracei motum vel generare vel extinguere posset, tempore ejus æquali, quo velocitate suâ æquabili quadruplam longitudinem suam Cylindrus ille conficeret, rationem habebit quam Liquoris densitas ad densitatem materiæ in Cylindro.



Vol. II.

Intelligatur à quavis materiâ Cylindrus base circulo EF, axe yz , qui in liquore aliquo infinito, maximè compresso, secundum directionem axis sui yz progrediatur. Sit d ad Δ ut densitas liquoris ad densitatem materiæ, quâ Cylindrus xyz factus est. Significet litera v datam quandam vim, quæ motum omnem Cylindri illius vel generare vel tollere posset, tempore ejus æquali, quo velocitate suâ æquabili longitudinem xyz Cylindrus ille conficeret. Designet litera r vim renixus in liquore, ad motum corporis xyz restringendum. Dico talem esse r , quæ fit ad v ut d ad Δ . Capiatur enim yz dimidia ejus altitudinis, à quā si grave cadat velocitatem adeptum erit ejus, quācum cylindrus xyz progreditur, æqualem. Base circulo EF, ipsius xy æquali, altitudinem yz ipsius yz æquali, intelligatur Cylindrus è materiâ quadam, cui densitas eadem quæ Liquoris sit. Hic Cylindrus, par cum altero illo, xyz , velocitate, secundum axem sui directionem in liquore progrediatur. Motus cylindri totius xyz ad motum in eâ ejus parte, cujus longitudo yz , rationem habet quam yz ad yz . Eadem verò tempus, quo cylindrus ille longitudinem xyz ad tempus, quo longitudinem xyz conficeret, habet. Vis igitur v , quæ motum cylindri totius vel generare vel extinguere posset, tempore ejus æquali, quo cylindrus ille longitudinem xyz conficeret; eadem, quo tempore cylindrus longitudinem xyz conficeret, motum ejus partis, cujus longitudo est yz , vel generare vel extinguere posset. Jam verò vis r , cum ex his quæ nos cum Pemberton ostendimus, ponderi Cylindri xyz æqualis sit, eumque pondus cylindri xyz motum ejus cylindri totum vel ge-

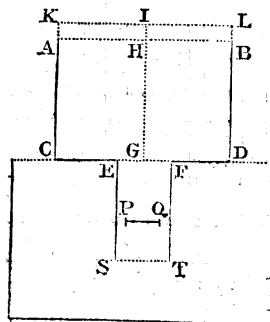
F f f

DECE

DE MOTU
CORPORUM

quæ oritur à compressione Fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus Fluidi Continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque resistentiam nec auget nec minuit. Certè actio Fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideoque resistentiam in hac Propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticas quàm in posticas, si modò propagatio ejus infinitè velocior sit, quàm motus corporis pressi. Infinitè autem velocior erit, & propagabitur in instanti, si modò Fluidum sit Continuum, & non Elasticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis Mediorum⁽ⁿ⁾.



Corol. 2. Si amplitudo canalis non augetur in infinitum, sed Cylindrus in Medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim, quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad EFq - PQq semel, &

ratione EFq ad EFq - PQq bis^(o), & ratione densitatis Medii ad densitatem Cylindri.

Corol. 3. Iisdem positis, & quòd longitudo L fit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione EFq - PQq ad EFq semel, & ratione EFq - PQq ad EFq bis: resistentia

nerare vel tollere posset, tempore ejus æquali, quo cylindrus velocitate suâ æquali quadruplum suæ longitudinis conficeret; siquidem velocitas cylindri æqualis ea est, quam corpus grave, rectâ cadendo per spatium 2g, adeptum erit; hæc cum ita sint, vis æ talis erit, quæ motum omnem cylindri EFg, tempore ejus æquali quo longitudinem 4g ille conficeret, generare vel tollere posset. Jam verò cum æquales sint Cylindrorum, EFg, 1778, progrediendi velocitates, cum longitudines etiam g, 78 inter se æquales sint, idcirco æqualia erunt tempora, quibus Cylindri illi longitudines æquales, 4g, 478, conficiant. Vires autem æ, v erunt inter se, ut motus quos, temporibus illis æqualibus, generare vel extinguere possent; hoc est ut motus Cylindrorum æqualium, EFg, 1778, pari cum velocitate progredientium; sive ut densitates mate-

æstentia Cylindri erit ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum longitudo L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri.

Scholium.

In hac Propositione Resistentiam investigavimus, quæ oritur à solâ magnitudine transversæ sectionis Cylindri, neglectâ resistentiæ parte, quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo Propositionis xxxvi. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hac Propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes Cylindri; efficitque ut Fluidum ad majorem distantiam commoveatur, & resistentiam auget, idque in eâ ferè ratione, quâ effluxum aquæ è vase diminuit, id est, in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter, & maximâ copiâ transirent per foramen EF, ponendo, quòd omnis aqua in vase, quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret sine motu: sic in hac Propositione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ, motu maximè directo & brevissimo cedentes, facillimum præbeant transitum Cylindro, & sola maneat resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum Cylindri; concipiendum est, quòd partes Fluidi, quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. [Sit ABCD rectangu-

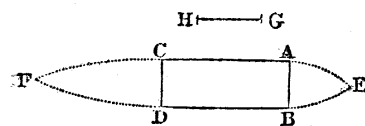
rie in Cylindris illis. Sed densitas materiæ in Cylindro EFg densitati Liquoris posita est æqualis; sive ei, quæ ad densitatem materiæ in Cylindro 1778 rationem habeat quam n ad a. Vis igitur æ talis erit quæ ad vim v rationem habeat quam n ad a. Q. E. D.

⁽ⁿ⁾ Hujus demonstratio eadem ferè quæ Corollarii 5. Prop. xxxv.

^(o) Pro hac ratione compositâ, in hoc & proximo etiam Corollario, substituenda est duplicata ejus quam habet 2.EF² ad EF² - PQ² + EF√EF² - PQ², ut exiis quæ cum Pembertonio ostendimus manifestum est. Cæterum ratio Pembertonii duplicata à compositâ illâ, quam Newtonus posuit, haud multum abidit, nisi magnus fuerit circulus PQ ratione basis canal.

F f f 2

lum,



lum, & sint AE & BE arcus duo Parabolici, axe AB descripti, latere autem recto quod sit ad spatium HG, describendum à Cylindro cadente, dum velocitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}$ AB. Sint etiam CF & DF arcus alii duo Parabolici, axe CD & latere recto, quod sit prioris lateris recti quadruplum, descripti] (P); & convolutione figuræ circum axem EF generetur Solidum; cujus media pars ABDC sit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ, ABE & CDF, contineant partes Fluidi inter se quiescentes, & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque, tanquam caput & cauda, adhæreant. Et Solidi EACFDB, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia, ea erit quamproximè, quam in hac Propositione descripsimus; id est, quæ rationem illam habet ad vim, quâ totus Cylindri motus, interea dum longitudo 4AC motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas Fluidi habet ad densitatem Cylindri quamproximè. Et hac vi resistentia minor esse non potest quam in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. xxxvi.

L E M M A V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successive, ut eorum axes cum axe canalis coincident: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impediunt.

Nam spatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem, per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quod aqua omnis supra Cylindrum Sphæram vel Sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in Corol. 7. Prop. xxxvi. explicui.

L E M M A

(*) A Cotesio sunt quæ uncis inclusimus. Eorum rationes in Corollaris Propositionis xxxvi. septimo

L E M M A VI.

LIBER
SECUNDUS.

Isdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per Lemma v. & Motus Legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuò æqualiter agunt.

L E M M A VII.

Si aqua quiescat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex Lemmate superiori, nam motus relativi idem inter se manent.

Scolium.

Eadem est ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his Lemmatis corpora esse politissima supponimus, & Medii tenacitatem & frictionem esse nullam; & quod partes Fluidi, quæ, motibus suis obliquis & superfluis, fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, & corporibus ad ipsorum partes anticæ & posticæ adhæreant, perinde ut in Scholio Propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentiâ omnium minimâ, quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora Fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut Fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figurâ sint obtusa; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt, quam si capite & caudâ sint acutis. Et corpora in Fluidis Elasticis mota, si antè & post obtusa sint, Fluidum paulo magis condensant ad anticam partem, & paulo magis re-

septimo et octavo poni nemq. non intelligit: infido sanè solo, ut mea fert opinio.

laxant

laxant ad posticam; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt, quàm si capite & caudâ sint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propositionibus non agimus de Fluidis Elasticis, sed de non-Elasticis; non de insidentibus Fluido, sed de altè immerfis. Et ubi resistentia corporum in Fluidis non Elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum, tam in Fluidis Elasticis, qualis est Aer, quàm in superficiebus Fluidorum stagnantium, qualia sunt Maria & Paludes.

P R O P. XXXVIII. T H E O R. XXX.

Globi, in Fluido compresso, infinito, & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi quamproximè.

Nam Globus est ad Cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet, interea dum Globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem Cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas Fluidi ad densitatem Cylindri vel Globi per Prop. xxxvii. & resistentia Globi æqualis est resistentiæ Cylindri per Lem. v, vi, vii. Q. E. D.

Corol. 1. Globorum, in Mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione, quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione densitatis Mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum Globus, vi ponderis sui comparativi, in Fluido resistente potest descendere, ea est, quam acquirere

(*) DESIGNANTE literâ d diametrum Globi, designet litera s spatium quod confecerit, quo tempore motus ejus, ex renixu liquoris circumfusi, parte dimidiâ minuerit. Jam in figurâ Cor. 6. Prop. xxxv. quando EF semissis est rectæ BC, erit et AB semissis rectæ AE. Unde designante tempus illud, per BE expositum, quo Globi motus parte dimidiâ minor factus fuerit, literâ verò t tempus expositum per AB, quo vis renixûs, qualis initio motûs erat, omnem globi motum extingueret, erit nimirum $t + i$, sive AE, = $2t$ sive 2AB; et $t = i$. Quare (per Cor. 7. Prop. xxxv.) spatium s ad spatium illud quod Globus, cum motu illo quem initio habuit, tempore t æqualiter confecerit, rationem habebit quam numerus, qui factus fuerit à logarithmo binarii Briggiano in numerum 2,30258 + multiplicato, ad unitatem habet. Sed spatium illud quod Globus, cum motu quem initio habuit tempore t æqualiter confecerit, huic $\frac{1}{2}d$ æquale. Nam propter æquales

acquire potest Globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ ca-
dendo, & casu suo describendo spatium, quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas Globi ad densitatem Fluidi. Nam Globus tempore casûs sui, cum velocitate cadendo acquisitâ, describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas Globi ad densitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore Globus octo tertias diametri suæ eadem velocitate describit, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi: ideoque per hanc Propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, & propterea Globum accelerare non potest.

Corol. 3. Datâ & densitate Globi, & velocitate ejus sub initio motûs, ut & densitate Fluidi compressi quiescentis, in quâ Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi, & ejus resistentia, & spatium ab eo descriptum, per Corol. 7. Prop. xxxv.

Corol. 4. Globus in Fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiâ motûs sui partem prius amittet, quàm longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem Corol. 7 (9).

P R O P. XXXIX. T H E O R. XXXI.

Globi per Fluidum, in canali cylindrico clausum & compressum, uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalís ad excessum bujus orificii supra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicatâ orificii canalís ad excessum bujus orificii supra circumulum maximum Globi (), & ratione densitatis Fluidi ad densitatem Globi quamproximè.*

AE, BE (fig. Cor. 6. Prop. xxxv.) erunt rectangula AB x EC, BE inter se æqualia. Sed BE est ad AB x BC ut spatium, quod globus cum motu suo primario, BE, tempore t , vel BE, confecerit, ad spatium quod confecerit tempore t vel AB, quo vis aliqua, æqualis ejus quæ initio fuit liquoris circumfusi vis renixûs, motum omnem BE extingueret. Quare hæc spatia inter se æqualia erunt. Horum verò posterius, propter æqualem materiæ in Globo et Liquoris circumfusi densitatem, spatium $\frac{1}{2}d$ æquale erit (per Prop. xxxviii.) Quare et prius eidem $\frac{1}{2}d$ æquale. Quapropter $s : \frac{1}{2}d = \log. 2 \times 2,30258 : 1$. Hinc $s = d \times 1,848$. Ergo spatium s minus quàm $2d$.

(*) Pro ratione ex duabus hæc compositâ, ratio duplicata, quæ in Corollariis Prop. xxxvii. secundo tertioque substituebatur, eadem hic substituenda est.

Patet per Corol. 2. Prop. xxxvii. procedit verò demonstratio quemadmodum in Propositione præcedente.

Scholium.

In Propositionibus duabus novissimis (perinde ut in Lem. v.) suppono quòd aqua omnis congelatur quæ Globum præcedit, & ejus fluiditas auget resistantiam Globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistantia aliquantulum. Sed augmentum illud in his Propositionibus parvum erit, & negligi potest; propterea quòd convexa superficies Globi totum ferè officium glaciei faciat.

P R O P. XL. P R O B. IX.

Globi, in Medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistantiam per Phenomena.

Sit A pondus Globi in Vacuo; B, pondus ejus in Medio resistente; D, diameter Globi; F spatium, quod fit ad $\frac{4}{3}$ B ut densitas Globi ad densitatem Medii, id est, ut A ad A - B; G, tempus, quo Globus, pondere B sine resistantiâ cadendo, describit spatium F; & H, velocitas quam globus hocce casu suo acquirit. Et erit H velocitas maxima

(*) DESIGNET littera v velocitatem quam Globus, per liquorem compressum cadendo, tempore p adeptus fuerit.

In figurâ Propositionis nonæ hujus Libri fit AP ad AC ut v ad H. Per punctum T, hyperbolæ AVZ, ducatur recta PT cum rectâ AC parallela; quæ cum hyperbolâ AVZ iterum in T conveniat, cum asymptotâ DC in P. Tribus rectis PT, AC, PT continua erit proportionis convenientia. (Hamilton. Conic. Lib. I. P. op. xxxvii.) Quare PT erit ad PT ut PT² ad AC². Convertendo PT ad TT ut PT² ad PT² - AC². Sed TT est ad TX ut 2 ad 1. Quare PT erit ad TX ut 2PT² ad PT² - AC². Et dividendo PT ad XT vel XT ut PT² + AC² ad PT² - AC². Sed propter rectas PT, CA parallelas, erit PT ad XT ut AC ad AP, id est ut H ad v. Quare H erit ad v ut PT² + AC² ad PT² - AC². Jam sit N quantitas quæ fit ad unitatem ut PT² ad AC². Erit igitur N + 1 ad N - 1 ut PT² + AC² ad PT² - AC². Quare H : v = N + 1 : N - 1. Et v = $\frac{N-1}{N+1}$ H.

Designet littera β Modulum systematis logarithmorum Briggiani. Sector hyperbolicus ADT est ad triangulum ADC ut logarithmus quivis rationis, quam AC habet ad PT, ad Modulum systematis sui. (Cotes. Harmon. Mens. Part I. Prop. IV.) Sed sector ADT ad triangulum ADC rationem habet quam p ad g. (Prop. IX. hujus Libri Cor. 5.) Erit igitur p ad g ut Logarithmus quivis rationis, quam AC habet ad PT, ad Modulum systematis sui. Quare 2p erit ad g ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam AC² habet ad PT², five ejus quam v habet ad H, ad Modulum systematis sui. Unde 2p : g = Log. Brigg. n : β. Et $\frac{2p}{g} \times \beta = \text{Log. Brigg. } n$. Sed β = 0,4342944819. (Cotes. Harmon. Mens.

Part I. Prop. II. Cor.) Quare n est quantitas illa cujus Logarithmus est $\frac{2p}{g} \times 0,4342944819$. Et

maxima quâcum globus, pondere suo B, in Medio resistente po-
test descendere, per Corol. 2. Prop. xxxviii. & Resistentia, quam Globus eâ cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus pondere B : Resistentia verò, quam patitur in aliâ quâcumque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per Corol. I. Prop. xxxviii.

Hæc est Resistentia, quæ oritur ab inertia materiæ Fluidi. Ea verò quæ oritur ab Elasticitate, Tenacitate, & Frictione partium ejus, sic investigabitur.

Demittatur Globus, ut pondere suo B in Fluido descendat; & fit p tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus g in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus, N, qui congruit logarithmo 0,4342944819 $\frac{2p}{g}$, fitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquisita erit $\frac{N-1}{N+1}$ H, altitudo autem descripta erit $\frac{2pF}{g} - 1,3862943611F + 4,605170186LF$. Si Fluidum fatis profundum sit, negligi potest terminus 4,605170186LF; & erit $\frac{2pF}{g} - 1,3862943611F$ altitudo descripta quamproximè. Patent hæc per Libri Secundi Propositionem Nonam & ejus Corollaria; ex hypothesi quòd Globus nullam aliam patiatur resistantiam, nisi quæ oritur ab inertia materiæ (*). Si

Et velocitas tempore p partu à Newtono recte definita est. Videamus de spatio quod casu conficitur: quod dicatur A. Spatium verò quod corpus aliquod cum velocitate H, eodem tempore p, æqualiter conficeret, dicatur s. In figurâ Propositionis nonæ ponitur AB pars quarta rectæ AC. Unde rectangulum AB × AC trianguli ADC dimidium erit. Area autem hyperbolica ABNK est ad rectangulum AB × AC ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam CK habet ad AC, ad Modulum systematis sui. (Cotes. Harmon. Mens. Part I. Prop. IV.) Quare area ABNK erit ad $\frac{1}{4}$ ADC, five 2ABNK ad ADC, ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam CK habet ad AC, ad Modulum systematis sui. Ponuntur autem tres illæ AC, AP, AK proportionem convenientes. Quare AC : AK = AC² : AP². Et convertendo AC : CK = AC² : AC² - AP². Sed AC² : AC² - AP² = H² : H² - v² = $H² : H² - \frac{N-1}{N+1} H² = 1 : 1 - \frac{N-1}{N+1} = 1 : \frac{N+1}{N+1} - \frac{N-1}{N+1} = 1 : \frac{2N}{N+1} = N+1 : 2N$.

Igitur CK : AC = 4N : N+1. Et 2ABNK erit ad ADC ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam 4N habet ad N+1, ad Modulum systematis sui; five ut Log. Brigg. $\frac{N+1}{4N}$ ad β. Sed ex iis quæ suprâ ostensa sunt, ADC est ad sectorem 2ADT = (g : 2p =) β : Log. Brigg. n.

Cum igitur sit 2ABNK : ADC = Log. Brigg. $\frac{N+1}{4N}$: β; et ADC : 2ADT = β : Log. Brigg. n.

Ex æquo erit ABNK : ADT = Log. Brigg. $\frac{N+1}{4N}$: Log. Brigg. n. Sed (per Cor. I. Prop. IX.)

VOL. II.

G g g

ABNK : ADT

DE MOTU
CORPORUM

Si verò aliam infuper refitentiam patiat, defcenfus erit tardior, & ex retardatione innotefcet quantitas hujus refitentiae.

Ut corporis, in Fluido cadentis, velocitas & defcenfus faciliùs innotefcant, compofui Tabulam fequentem, cujus columna pri-

Tempora P	Velocitates cadentis in Fluido.	Spatia caden- do defcripta in Fluido.	Spatia motu maximo de- fcripta.	Spatia caden- do defcripta in Vacuo.
0,001 G	99999 ² ₃	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559970 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99999920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	99999999	18,6137056 F	20 F	100 F

ma denotat Tempora defcenfus; fecunda exhibet Velocitates cadendo acquifitas, exiftente velocitate maximâ 1.00000000; tertia ex-

hibet

ADNK : ADT = A : s. Quare A : s = Log. Brigg. $\frac{N+1}{4N}$: Log. Brigg. N. Et A x Log. Brigg. N.

= s x Log. Brigg. $\frac{N+1}{4N}$. Jam verò cum s, & 2F, fint spatia illa, quæ corpora, cum velocitate

æquabiliter progredientia, temporibus F & G, conficerent, erit s : 2F = F : G, et s = $\frac{2FF}{G}$.

Unde rursum A x Log. Brigg. N = 2FF x Log. Brigg. $\frac{N+1}{4N}$ = $\frac{2FF}{G}$ x Log. Brigg. $\frac{N+1}{4N}$.

$\frac{2FF}{G}$ x 2L + Log. Brigg. N - Log. Brigg. 4. Hoc est, cum ostensus fit Log. Brigg. N = $\frac{2P}{G}$ x β .

erit A x $\frac{2P}{G}$ x β = $\frac{2P}{G}$ x F x 2L + F x $\frac{2P}{G}$ x β - F x Log. Brigg. 4. Quare A = $\frac{2FF}{G}$ + F x $\frac{2L}{\beta}$ -

F Log. Brigg. 4.

3

3ed

hibet Spatia temporibus illis cadendo defcripta, exiftente 2F $\frac{2P}{G}$ spatio, quod corpus, tempore G, cum velocitate maximâ defcribit; & quarta exhibet Spatia, iisdem temporibus, cum velocitate maximâ defcripta. Numeri in quartâ columnâ funt $\frac{2P}{G}$; & subducendo numerum 1,3862944 - 4,6051702 L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ; & multiplicandi funt hi numeri per spatium F, ut habeantur spatia cadendo defcripta. Quinta his infuper adjecta est columna, quæ continet spatia defcripta, iisdem temporibus, à corpore, vi ponderis fui comparativi B, in Vacuo cadente.

Scolium.

Ut Refitentias Fluidorum investigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem pedis Londinenfis, profunditate pedum novem cum femiffe, idemque implevi Aquâ Pluviali; & Globis ex cerâ & plumbo inclufo formati, notavi tempora defcenfus Globorum, exiftente defcenfus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus Londinenfis continet 76 libras Romanas Aquæ Pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{16}$ uncias libræ hujus, seu grana 253 $\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius defcriptus continet grana 132,645 in Medio Aeris, vel grana 132,8 in Vacuo; & globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in Vacuo fupra pondus ejus in Aquâ.

Exper. I. Globus, cujus pondus erat 156 $\frac{1}{4}$ granorum in Aere

Sed $\beta = 0,4342944819$.

Et Log. Brigg. 4 = 0,6020599913.

Quare $\frac{2}{\beta} = 4,605170186$.

Et Log. Brigg. 4 = 1,3862943611.

Unde A, five altitudo casu recto tempore F confecta, ea erit $\frac{2FF}{G} - 1,3862943611 F +$

4,605170186 L F; omnino qualis à Newtono definita est.

Quòd si permagna fit altitudo A, ut AF in figurâ Prop. IX. rectæ AC propemodum æqualis fiat, permagnum erit quadratum ex H ratione quadrati ex AC; unde numerus N permagnus, et $\frac{N+1}{N}$ tate vix major erit. Ejus igitur Logarithmus L in nihilum propemodum abiit, & membrum $\frac{F \times 2L}{\beta}$ negligere licebit, sicut Newtonus statuit.

G g g 2

&

& 77 granorum in Aquâ, altitudinem totam, digitorum 112, tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, Globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

Pondus globi in Vacuo est $156\frac{13}{38}$ gran. & excessus hujus ponderis supra pondus globi in Aquâ est $79\frac{13}{38}$ gran. Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi in Vacuo, ita densitas aquæ ad densitatem globi; & ita partes octo tertiæ diametri globi (viz. 2,24597 dig.) ad spatium 2F, quod perinde erit 4,4256 dig. Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in Vacuo describet digitos 193 $\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, sine resistentiâ cadendo in Aquâ describet digitos 95,219; & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 dig. ad 95,219 dig. describet 2,2128 dig. & velocitatem maximam H acquireret quâcum potest in Aquâ descendere. Est igitur tempus G 0",15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus describet spatium, 2F, digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. Subducatur spatium 1,3862944F seu 3,0676 dig. & manebit spatium 113,0569 digitorum, quod globus cadendo in Aquâ, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum orificii hujus supra semicirculum maximum globi, & ex simplici ratione orificii ejusdem ad excessum ejus supra circulum maximum globi; id est, in ratione 1 ad 0,9914. Quofacto, habebitur spatium 112,08 digitorum, quod globus, cadendo in Aquâ, in hoc vase ligneo, tempore minutorum quatuor secundorum per Theoriam describere debuit quamproximè. Descripsit verò digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera seorsim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in Aere & $5\frac{1}{6}$ granorum in Aquâ, successivè demittebantur; & unusquisque cecidit in Aquâ tempore minutorum secundorum.

secundorum quindecim, casu suo describens altitudinem digitorum 112. LIBER
SECUNDUS.

Computum ineundo prodeunt Pondus globi in Vacuo $76\frac{1}{3}$ gran. Excessus hujus ponderis supra pondus in Aquâ $71\frac{17}{48}$ gran. Diameter globi 0,81296 dig. Octo Tertiæ partes hujus diametri 2,16789 dig. Spatium 2F 2,3217 dig. Spatium, quod globus pondere $5\frac{1}{6}$ gran. tempore 1" sine resistentiâ cadendo describat, 12,808 dig. & Tempus G 0",301056. Globus igitur, velocitate maximâ, quâcum potest in Aquâ vi ponderis $5\frac{1}{6}$ gran. descendere, tempore 0",301056 describet spatium 2,3217 dig. & tempore 15" spatium 115,678 dig. Subducatur spatium 1,3862944F seu 1,609 dig. & manebit spatium 114,069 dig. quod proinde globus eodem tempore, in vase latissimo cadendo, describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0,895 dig. circiter. Et sic manebit spatium 113,174 dig. quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15" describere debuit per Theoriam quamproximè. Descripsit vero digitos 112 per Experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 gran. in Aere & 1 gran. in Aquâ, successivè demittebantur; & cadebant in Aquâ temporibus 46", 47", & 50", describentes altitudinem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40" circiter. Quòd tardius ceciderunt, utrum minori proportioni resistentiæ, quæ à vi inertie in tardis motibus oritur, ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis,tribuendum sit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manûs globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum esse puto. Ideoque pondus globi in Aquâ debet esse plurimum granorum, ut Experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hæcenus descripta cepi, ut investigarem Resistentias Fluidorum, antequam Theoria, in Propositionibus proximè præcedentibus exposita, mihi innotesceret. Postea, ut Theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum 8 $\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente.

te. Deinde ex cerâ & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in Aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in Aquâ. Et hos demissi, ut tempora cadendi in Aquâ per Pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in Aquâ, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus, ex aquâ extantis, descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immergi quiescebant, demittebantur quàm cautissimè, ne impulsus aliquem à manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successivè temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50, & 51 , describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat, quàm cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53; ac tertio, temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpiùs capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt Pondus globi in Vacuo $139\frac{1}{2}$ granorum: Excessus hujus ponderis supra pondus globi in Aquâ $132\frac{11}{16}$ gran. Diameter globi 0,99868 dig. Octo tertiæ partes diametri 2,66315 dig. Spatium 2F 2,8066 dig. Spatium, quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi, sine resistentiâ cadendo describit, 9,88164 dig. Et tempus 6 0",376843. Globus igitur, velocitate maximâ, quâcum potest in Aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore 0",376843 describit spatium 2,8066 digitorum, & tempore 1" spatium 7,4466 digitorum, & tempore 25", seu oscillationum 50, spatium 186,1915 dig. Subducatur spatium 1,386294 F, seu 1,9454 dig. & manebit spatium 184,2461 dig. quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semicirculum

micirculum maximum globi, & simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; & habebitur spatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vase, tempore oscillationum 50, describere debuit per Theoriam quamproximè. Descripsit verò spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$, vel 50, per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor, pondere $154\frac{3}{8}$ gran. in Aere & $21\frac{1}{2}$ gran. in Aquâ, sæpè demissi cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30; & nonnunquam 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque, pondere $212\frac{1}{8}$ gran. in Aere & $79\frac{1}{2}$ in Aquâ, sæpè demissi cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor, pondere $293\frac{3}{8}$ gran. in Aere & $35\frac{7}{8}$ gran. in Aquâ, sæpè demissi cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproximè.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra; latere illo, quod fortè gravius esset, primum descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quàm si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo descendere deberet: & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit semper à latere suo quod per oscillationem descendit; & recedendo, appropinquat lateribus vasis, & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est,

est, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demissi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quàm prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in Aere & 6½ in Aquâ, sæpè demissi ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quàm 52, non pauciorum quàm 50, & maximâ ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum 273¼ in Aere & 140½ in Aquâ, sæpius demissi ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quàm 12, non plurium quàm 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum 11½ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in Aere & 119½ in Aquâ, sæpè demissi cadebant temporibus oscillationum 17¾, 18, 18½ & 19, describentes altitudinem digitorum 181½. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audiui impulsus eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam verò cadere debuerunt tempore oscillationum 15½ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in Aere & 3¾ in Aquâ, sæpè demissi ceciderunt temporibus oscillationum 43½, 44, 44½, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum 182½ quamproximè.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 46½ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in Aere & 4½ in Aquâ, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum

tionum 61, 62, 63, 64 & 65, describentes altitudinem digitorum 182. LIBER SECUNDUS.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 64½ quamproximè.

Per hæc Experimenta manifestum est, quòd, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per Theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, resistentia paulo major extitit quàm in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi, inter cadendum, oscillant aliquantulum; & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem, citò cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aquâ ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur à Fluido ad posticas suas partes; & si velocitas perpetuò augeatur, spatium vacuum tandem à tergo relinquent, nisi compressio Fluidi simul augeatur. Debet autem compressio Fluidi (per Prop. xxxii. & xxxiii.) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut resistentia sit in eadem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur à tergo, & defectu pressionis hujus, resistentia eorum sit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur Theoria cum Phænomenis corporum cadentium in Aquâ. Reliquum est ut examinemus Phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Ecclesiæ Sancti Pauli, in urbe Londini, mense Junio 1710, Globi duo vitrei singuli demittebantur; unus Argenti Vivi plenus, alter Aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum Londinensium 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbibat; & globi duo, huic Tabulæ impositi, simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope filii ferrei, ad terram usque demissi, ut Tabula, polis ferreis solummodo innixa, super iisdem devolveretur; & eodem temporis momento, Pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud ferreum tractum, demitteretur,

teretur, & oscillare inciperet. Diametri & Pondera globorum, ac Tempora cadendi exhibentur in Tabulâ sequente.

Globorum Mercurio plenorum			Globorum Aere plenorum.		
Pondera	Diametri	Tempora cadendi.	Pondera	Diametri	Tempora cadendi.
908 gran.	0,8 digit.	4"	510 gran.	5,1 digit.	8" $\frac{1}{2}$
983	0,8	4 —	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8 $\frac{1}{4}$
608	0,75	4	483	5,0	8 $\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

Cæterum Tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilei*) minutis quatuor secundis describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum 3" 42". Tabula lignea utique, detracto pefculo, tardius devolvebatur quam par erat, & tardâ suâ devolutione impediēbat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbēbant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propriores erant axi ejus quam pefculo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus, qui Tabulæ devolventi paulo diutius incumbēbant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidere, evadent 8" 12", 7" 42", 7" 42", 7" 57", 8" 12", & 7" 42".

Globorum igitur Aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque, pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore 8" 12", describendo altitudinem pedum 220. Pondus Aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; & pondus Aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ gran. seu 19 $\frac{3}{10}$ gran. ideoque pondus globi in Vacuo est 502 $\frac{3}{10}$ gran. & hoc pondus est ad pondus Aeris globo æqualis, ut 502 $\frac{3}{10}$ ad 19 $\frac{3}{10}$, & ita sunt 28 ad octo tertias partes diametri globi; id est, ad 13 $\frac{1}{3}$ digitos. Unde 28 prodeunt 28 ped. 11 dig. Globus cadendo in Vacuo, toto suo pondere 502 $\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos 193 $\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 gran. describit digitos 185,905, & eodem tempore 483 gran. etiam in Vacuo describit spatium r seu 14 ped. 5 $\frac{1}{2}$ dig.

tempore

(*) — ope sphaeræ lignæ concavæ ambientis] Sic habent Editionis tertiæ exemplaria, quotquot in chartâ minore sunt expressâ. Nos damus quæ in chartis majoribus leguntur. Quod ideo monendum

tempore 57" 58", & velocitatem maximam acquirit quâcumq; fit in Aere descendere. Hâc velocitate globus, tempore 8" 12", describet spatium pedum 245 & digitorum 5 $\frac{1}{2}$. Aufer 1,3863 r seu 20 ped. 0 $\frac{1}{2}$ dig. & manebunt 225 ped. 5 dig. Hoc spatium igitur globus, tempore 8" 12", cadendo describere debuit per Theoriam. Descripsit verò spatium 220 pedum per Experimentum. Differentia insensibilis est.

Similibus computis ad reliquos etiam globos Aere plenos applicatis, confeci Tabulam sequentem.

Globorum pondera.	Diametri.	Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.	Spatia describenda per Theoriam.	Excessus.
510 gran.	5,1 digit.	8" 12"	226 ped. 11 dig.	6 ped. 11 dig.
642	5,2	7 42	230 9	10 9
599	5,1	7 42	227 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5,2	7 42	230 7	10 7

Exper. 14. Anno 1719, mense Julio, D. Defaguliers hujusmodi Experimenta iterum cepit; formando veficas porcorum in orbem sphaericum, ope sphaeræ lignæ concavæ (*), quam madafactæ implere cogebantur inflando aerem; & hæc, arefactas & exemptas, demittendo ab altiore loco in templi ejusdem turri rotundâ fornicatâ, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento, demittendo etiam globum plumbeum, cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui stantes in supremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii stantes in terrâ notabant differentiam temporum inter casum globi plumbei & casum veficæ. Tempora autem mensurabantur Pendulis ad dimidia minuta secunda oscillantibus. Et eorum, qui in terrâ stabant, unus habebat horologium cum elatere ad singula minuta secunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam, affabrè constructam, cum Pendulo etiam ad singula minuta secunda quater vibrante. Et similem machinam habebat unus eorum, qui stabant in summi-

monendum duximus, nequis, cui ad manum fortè sit exemplar duntaxat è minoribus, aut fidem nostram aut diligentiam in otiosâ istâ voce ambientis desideret.

tate templi. Et hæc instrumenta ita formabantur, ut motus eorum, pro lubitu, vel inciperent vel sisterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minorum secundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum, quò vesica cecidit. Tempora, quibus vesicæ quinque post casum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & secundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$, & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota, quibus vesicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$, & $21\frac{1}{8}''$; & secundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in summitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & secundâ vice $19''$, $18\frac{3}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterum vesicæ non semper rectâ cadebant, sed nonnunquam volitabant, & hinc inde oscillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata sunt & aucta, nonnunquam dimidio minuti unius secundi, nonnunquam minuto secundo toto. Cadebant autem rectius vesica secunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia secundâ vice. Vesica quinta rugosa erat, & per rugas suas nonnihil retardabatur. Diametros vesicarum deducebam ex earum circumferentiis, filo tenuissimo bis circumdato, mensuratis. Et Theoriam contuli cum Experimentis in Tabulâ sequente; assumendo densitatem Aëris esse ad densitatem Aquæ Pluvialis ut 1 ad 860, & computando spatia, quæ globi per Theoriam describere debuerunt cadendo.

Vesicarum pondera.	Diametri.	Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.	Spatia iisdem temporibus describenda per Theoriam.	Differentia inter Theor. & Exper.
128 gran.	5,28 dig.	19''	271 ped. 11 dig.	— 0 ped. 1 dig.
156	5,19	17	272	+ 0 0 $\frac{1}{2}$
137 $\frac{1}{2}$	5,3	18 $\frac{1}{2}$	274	+ 0 7
97	5,26	22	277	+ 5 4
99 $\frac{1}{2}$	5	21 $\frac{1}{2}$	282	+ 10 0

Globorum, igitur tam in Aëre quàm in Aquâ motorum, Resistencia propè omnis per Theoriam nostram rectè exhibetur, ac densitati Fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

In

In Scholio, quod Sectioni Sextæ subjunctum est, ostendimus, per Experimenta Pendulorum, quòd Globorum æqualium & æquivelocium, in Aëre, Aquâ, & Argento Vivo motorum, resistentiæ sunt ut Fluidorum densitates. Idem hîc ostendimus magis accuratè per Experimenta corporum cadentium in Aëre & Aquâ. Nam Pendula singulis oscillationibus motum cient in Fluido motui Penduli redeuntis semper contrarium; & resistentia ab hoc motu oriunda, ut & resistentia fili, quo Pendulum suspendebatur, totam Penduli resistentiam majorem reddiderunt, quàm resistentia quæ per Experimenta corporum cadentium prodiit. Et enim per experimenta Pendulorum in Scholio illo exposita, Globus ejusdem densitatis cum Aquâ, describendo longitudinem semidiametri suæ in Aëre, amittere deberet motûs sui partem $\frac{1}{3342}$. At per Theoriam, in hac septimâ sectione expositam & Experimentis cadentium confirmatam, Globus idem, describendo longitudinem eandem, amittere deberet motûs sui partem tantum $\frac{1}{4386}$; posito, quòd densitas Aquæ sit ad densitatem Aëris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta Pendulorum majores prodire (ob causas jam descriptas) quàm per experimenta Globorum cadentium; idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum Pendulorum, in Aëre, Aquâ & Argento Vivo oscillantium resistentiæ à causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his Mediis, tam per experimenta Pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, satis rectè exhibebitur. Et inde concludi potest, quòd corporum, in Fluidis quibuscunque fluidissimis motorum, Resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates Fluidorum.

His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motûs sui partem Globus quilibet, in Fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit d diameter globi; & v velocitas ejus sub initio motûs; & t tempus, quo globus velocitate v in Vacuo describet spatium, quod fit ad spatium $\frac{8}{3}d$ ut densitas Globi ad densitatem Fluidi: & globus in Fluido illo projectus, tempore quovis alio t , amittet velocitatis suæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente pate $\frac{T+1}{T}$; & describet spatium, quod fit ad spatium uniformi velocitate v eodem tempore descriptum in Vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 est ad numerum

 $\frac{1}{T}$

$\frac{1}{T}$, per Corol. 7. Prop. xxxv. In motibus tardis Resistētia potest esse paulo minor, propterea quod figura Globi paulo aptior sit ad motum, quàm figura Cylindri eadem diametro descripti. In motibus velocibus Resistētia potest esse paulo major, propterea quod Elasticitas & Compressio Fluidi non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujusmodi minutias hîc non expendo.

Et quamvis Aër, Aqua, Argentum Vivum & similia Fluida, per divisionem partium in infinitum, subtiliarentur & fierent Media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minùs resisterent. Nam resistētia, de quâ agitur in Propositionibus præcedentibus, oritur ab inertâ materiæ; & inertia materiæ corporibus essentiâlis est, & quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium Fluidi, resistētia, quæ oritur à Tenacitate & Frictione partium, diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non minuitur; &, manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertæ, cui Resistētia, de quâ hîc agitur, semper proportionalis est. Ut hæc Resistētia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis, per quæ corpora moventur. Et propterea spatia cœlestia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in partes omnes liberrimè, & sine omni motûs diminutione sensibili, perpetuò moventur, Fluido omni corporeo destituuntur, si fortè vapores longè tenuissimos, & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in Fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab excessu pressiois Fluidi, ad Projectilis partes anticas, supra pressioem ad ejus partes posticas; & non minor esse potest in Mediis infinitè fluidis quàm in Aere, Aquâ & Argento Vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressiois excessus, pro quantitate suâ, non tantum motum cient in Fluido, sed etiam agit in Projectile ad motum ejus retardandum: & propterea Resistētia, in omni Fluido, est ut motus in Fluido à Projectili excitatus; nec minor esse potest in Æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quàm in Aère, Aquâ & Argento Vivo pro densitatibus horum Fluidorum.

S E C T I O

S E C T I O VIII.

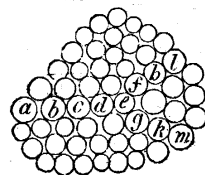
De Motu per Fluida propagato.

LIBER
SECUNDUS.

P R O P. XLI. T H E O R. XXXII.

Pressio non propagatur per Fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particule Fluidi in directum jacent.

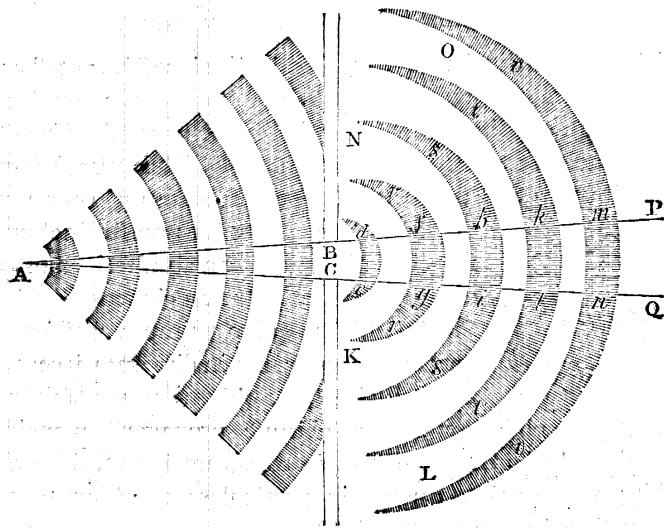
Si jaceant particule *a, b, c, d, e* in lineâ rectâ, potest quidem pressio directè propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas obliquè positas, *f* & *g*, obliquè; & particule illæ, *f* & *g*, non sustinebunt pressioem illatam, nisi fulciantur à particulis ulterioribus, *b* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressioem, nisi fulciantur ab ulterioribus, *l* & *m*, easque premant; & sic deinceps in infinitum.



Pressio igitur, quàm primum propagatur ad particulas, quæ non in directum jacent, divaricare incipiet, & obliquè propagabitur in infinitum; & postquam incipit obliquè propagari, si inciderit in particulas ultiores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. Q. E. D.

Corol. Si pressiois, à dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia ponè obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* (vid. fig. p. 432) propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo NBCK perforato in BC, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem APQ, quæ per foramen circulare BC transit. Planis transversis, *de, fg, bi*, distinguatur conus APQ in frusta; & interea dum conus ABC, pressioem propagando, urget frustum conicum ulterius *de, fg* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fg, bi* in superficie *fg*, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motûs Legem tertiam) quod frustum primum *de, fg*, reactione frusti secundi *fg, bi*, tantum urgebitur & premetur in superficie *fg*, quantum urget & premit frustum illud secundum. Frustum igitur *de, fg* inter

inter conum *ade* & frustum *fbig* comprimitur utrinque, & prop-
terea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram suam servare nequit,
nisi vi eadem comprimitur undique. Eodem igitur impetu, quo
premitur in superficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*,
eg; ibique (cùm rigidum non sit, sed omnimodo fluidum) ex-



curret ac dilatabitur, nisi Fluidum ambiens adsit, quo conatus
iste cohibeatur. Proinde conatu excurrenti premet tam Flui-
dum ambiens ad latera *df*, *eg* quàm frustum *fbig* eodem impetu;
& propterea pressio non minùs propagabitur à lateribus *df*, *eg* in
spatia *no*, *kl* hinc inde, quàm propagatur à superficie *fg* versus
pq. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR. XX.

*Motus omnis per Fluidum propagatus divergit à recto tramite in
spatia immota.*

Caf. 1. Propagetur motus à puncto A per foramen *bc*, per-
gatque, si fieri potest, in spatio conico *bcqp*, secundum lineas
rectas divergentes à puncto A. Et ponamus primò, quòd motus
iste sit undarum in superficie stagnantis Aquæ. Sintque *de*, *fg*, *bi*,
kl,

kl, &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem
intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in un-
darum jugis altior est, quàm in Fluidi partibus immotis *lk*, *no*,
defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *b*, *k*, &c.
hinc inde versus *kl* & *no*: & quoniam in undarum vallibus de-
pressior est, quàm in Fluidi partibus immotis *kl*, *no*; defluet ea-
dem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore
undarum Juga, posteriore Valles, hinc inde dilatantur, & propa-
gantur versus *kl* & *no*. Et quoniam motus undarum ab A ver-
sus *pq* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos,
ideoque celerior non est quàm pro celeritate descensûs; & descen-
sus aquæ hinc inde versus *kl* & *no* eadem velocitate peragi de-
bet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus *kl* & *no*
eadem velocitate, quâ undæ ipsæ ab A versus *pq* rectâ progredi-
untur. Proindeque spatium totum hinc inde versus *kl* & *no*
ab undis dilatatis *rfgr*, *sbis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. Q. E. D.
Hæc ita se habere quilibet in Aquâ stagnante experiri potest.

Caf. 2. Ponamus jam, quòd *de*, *fg*, *bi*, *kl*, *mn* designent pulsus
à puncto A, per Medium Elasticum, successivè propagatos. Pul-
sus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactio-
nes Medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphaericam oc-
cupet superficiem circa centrum A descriptam, & inter pulsus suc-
cessivos æqualia intercedant intervalla. Designet autem lineæ *de*,
fg, *bi*, *kl*, &c. densissimas pulsuum partes, per foramen *bc* pro-
pagatas. Et quoniam Medium ibi densius est, quàm in spatiis
hinc inde versus *kl* & *no*, dilatabit sese tam versus spatia illa
kl, *no* utrinque sita, quàm versus pulsuum rariora intervalla;
eoque pacto rariùs semper evadens è regione intervallorum, ac
densius è regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et
quoniam pulsuum progressivus motus oritur à perpetuâ relaxatione
partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; & pul-
sus eadem ferè celeritate sese in Medii partes quiescentes *kl*, *no*
hinc inde relaxare debent; pulsus illi eadem ferè celeritate sese
dilatabunt undique in spatia immota *kl*, *no*, quâ propagantur
directè à centro A; ideoque spatium totum *klon* occupabunt.
Q. E. D. Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interposito au-
diuntur, vel in cubiculum per fenestram admissi sese in omnes
VOL. II. I i i cubiculi

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppositis, quàm à fenestrâ directè propagati, quantum ex sensu judicare licet.

Caf. 3. Ponamus denique, quòd motus cujuscunque generis propagetur ab A per foramen BC : & quoniam propagatio ista non fit, nisi quatenus partes Medii centro A propiores urgent commoventque partes ulteriores ; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaverfum in regiones ubi minùs premuntur : recedent eadem versùs Medii partes omnes quiescentes, tam laterales KL & NO, quàm anteriores PQ ; eoque pacto motus omnis, quàm primùm per foramen BC transiit, dilatari incipiet, & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. Q. E. D.

P R O P. XLIII. T H E O R. XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsum undique in directum ; in Medio verò non Elastico motum circula-rem excitabit.

Caf. 1. Nam partes corporis tremuli, vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo comprimant easdem & condensabunt ; dein, reditu suo, sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli : & quâ ratione partes corporis hujus agitabant hæc Medii partes, hæc, similibus tremoribus agitæ, agitabunt partes sibi proximas ; eæque similiter agitæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur, & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ, quoties eunt, condensantur, & quoties redeunt, sese expandunt^(a). Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ab invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt, dum aliæ redeunt ; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eun-

do

^(a) Cave sic intelligas, quasi partes Liquoris, dum progrediantur, magis usque se condensent, dum redeant, rarefiant ; id enim neutiquam verum est. Sed illud modò vult Newtonus, partes Liquoris

PRINCIPIA MATHEMATICA.

do condensatæ, ob motum suum progressivum, quo ferunt ob-
stacula, sunt pulsus ; & propterea pulsus successivi à corpore om-
ni tremulo in directum propagabuntur ; idque æqualibus circiter
ab invicem distantis, ob æqualia temporis intervalla, quibus cor-
pus, tremoribus suis singulis, singulos pulsus excitat. Et quan-
quam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam
aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medi-
um propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præce-
dentem ; & à corpore illo tremulo, tanquam centro communi,
secundum superficies propemodum sphaericas & concentricas, un-
dique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus
in Undis ; quæ, si digito tremulo excitentur, non solum pergent
hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum cir-
culorum concentricorum, digitum statim cingent & undique
propagabuntur. Nam Gravitatis undarum supplet locum vis El-
lasticæ.

Caf. 2. Quòd si Medium non fit Elasticum : quoniam ejus par-
tes, à corporis tremuli partibus vibratis pressæ, condensari ne-
queunt, propagabitur motus, in instanti, ad partes ubi Medium
facillimè cedit ; hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui
vacuas à tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in
Medio quocunque projecti. Medium, cedendo projectilibus, non
recedit in infinitum ; sed, in circulum eundo, pergit ad spatia,
quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum
pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per cir-
culum ad partes quas corpus relinquit ; & quoties corpus regre-
ditur ad locum priorem, Medium inde repellitur, & ad locum
suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit fir-
mum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum
maneant, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere,
quin alibi eidem simul cedat ; efficiet ut Medium, recedendo à
partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ ei-
dem cedunt. Q. E. D.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium
Flammæ ad pressuram, per Medium ambiens, secundum lineas

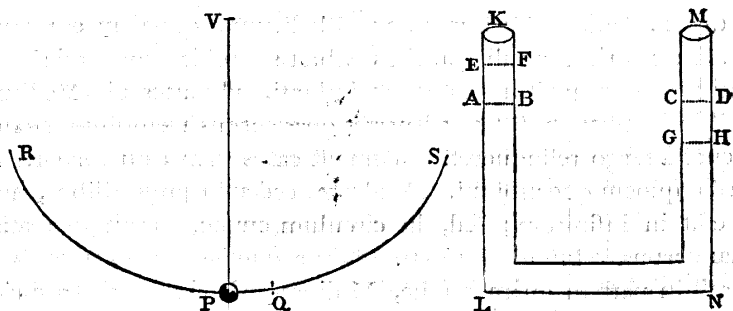
Liquoris euntes magis densas, redeuntes rariore esse, quàm si tota moles liquida, ab omni vi
externâ immunis, flagraret, et uniformem ubique densitatem servaret. Pemberton.

rectas propagandam conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione solâ partium flammæ, sed à totius dilatatione derivari.

PROP. XLIV. THEOR. XXXV.

Si aqua in Canalis cruribus erectis, KL, MN, vicibus alternis ascendat & descendat; construaturs Pendulum, cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, æquetur semissi longitudinis aquæ in Canali: dico, quod Aqua ascendet & descendet iisdem temporibus, quibus Pendulum oscillatur.

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando; & resistentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canal, hîc non confidero. Designent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utro-



que; & ubi aqua in crure KL ascendit ad altitudinem EF, descendit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum; VP filum; V punctum suspensionis; RPQS Cyclois, quam Pendulum describat; P ejus punctum infimum; PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero: ideoque, ubi aqua in crure KL ascendit ad EF, & in crure altero descendit ad GH, vis illa est pondus duplicatum aquæ EABF; & propterea est ad pondus aquæ totius ut AE, seu PQ, ad VP, seu PR. Vis etiam, quâ pondus P, in loco quovis Q, acceleratur & retardatur in Cycloide (per Corol. Prop.

Prop.

Prop. LI.)^(b) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia PQ à loco infimo P, ad Cycloidis longitudinem PR. Quare Aquæ & Penduli, æqualia spatia AE, PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque, si Aqua & Pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendentis, five motus intensior sit five remissior, vices omnes sunt Isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum Parisiensium $6\frac{1}{2}$: aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam Pendulum pedum $3\frac{1}{8}$ longitudinis tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicatâ.

PROP. XLVI. THEOR. XXXVI.

Undarum velocitas est in subduplicatâ ratione latitudinum.

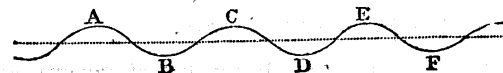
Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

PROP. XLVI. PROB. XII.

Invenire velocitatem Undarum.

Constituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore Pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficiant.

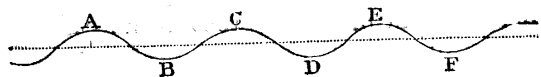
Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel vallibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet ABCDEF superficiem aquæ stagnantis, undis successive ascendentes ac descendentes; sintque A, C, E, &c. undarum culmina, &



tem ac descendentes; sintque A, C, E, &c. undarum culmina, &

^(b) Libri Primi.

B, D, F, &c. valles intermediæ. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes A, C, E, &c. quæ nunc altiffimæ ſunt, mox fiant infimæ; & viſ motrix, quâ partes altiffimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt



pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in Canali, eademque temporis leges observabit: & propterea (per Prop. XLIV.) si distantia inter undarum loca altissima A, C, E & infima B, D, F æquantur duplæ Penduli longitudini (^c); partes altissimæ A, C, E, tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius de novo ascendent. Igitur inter transitum undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, unda describet latitudinem suam, quo tempore Pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore Pendulum, cujus longitudo quadrupla est, ideoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. Q. E. I.

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{8}$ latæ sunt, tempore minuti unius *secundi* progrediendo latitudinem suam conficiunt; ideoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproximè.

Corol. 2. Et Undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicatâ ratione latitudinis.

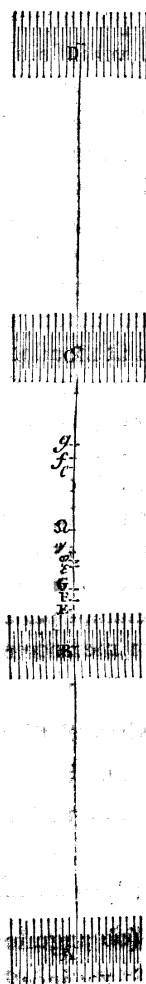
Hæc ita se habent, ex hypothesi quod partes aquæ recti ascendunt vel rectâ descendunt; sed ascensus & descensus ille verius fit per circuitum, ideoque tempus, hac Propositione, non nisi quamproximè definitum esse affirmo.

P R O P. XLVII. T H E O R. XXXVII.

Pulsibus per Fluidum propagatis, singulae Fluidi particulae, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis Penduli.

Designet AB, BC, CD, &c. pulsuum fucceffivorum æquales dif-
tantias; ABC, plagam motûs pulsuum ab A versus B propagati;

(^c) Id est, si distantia loci cujusque altissimi A, vel c, vel e, ab infimorum proximo B, vel d, vel



E, F, G, puncta tria physica Medii quiescentis, in rectâ AC ad æquales ab invicem distantias sita; Ee, Ff, Gg, spatia æqualia perbrevia, per quæ puncta illa, motu reciproco, singulis vibrationibus eunt

In circumferentiâ $PHSb$ capiantur æquales arcus HI , IK , vel bi , ik ; eam habentes rationem ad circumferentiam totam, quam habent æquales rectæ EF , FG ad pulsum intervallum totum BC . Et de-
missis perpendiculis IM , KN , vel im , kn , quoniam puncta E , F , G motibus similibus successivè agitantur, & vibrationes suas integras, ex itu & reditu compositas, interea peragunt, dum pulsus transfertur à B ad C ; si PH , vel $PHSb$, sit tempus à b initio motus puncti E , erit PI , vel $PHSi$, tempus ab initio motus puncti F ; & PK , vel $PHSk$, tempus ab initio motus puncti G ; & prop-
terea æquetur duplæ Penduli longitudini.

PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates sunt in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione vis elasticæ directæ & subduplicatâ ratione densitatis inversæ; si modò Fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantiae in his Mediis æquantur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Veruntamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibilibiter, ideoque pro physicè accuratâ haberi potest. Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium, simul genitæ, sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes itus & reditus suos, per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui, tempore itus & reditus unius, latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proximè præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiae, seu longitudines, sint majores in uno Medio quàm in altero; ponamus, quòd partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia, singulis vicibus eundo & redeundo, describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elasticæ motrices, quibus reciproco motu agitantur. Materia autem, his viribus movenda, est ut pulsuum latitudo: & in eadem ratione est spatium, per quod singulis vicibus, eundo & redeundo, moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ materiæ & ratione subduplicatâ spatii (^e), atque ideo ut spatium. Pulsus autem, temporibus itus & reditus unius eundo, latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquveloces.

(^e) Per Prop. XLVII. et Prop. XXIV. Cor. 5.

Cas.

Cas. 3. In Mediis igitur densitate & vi elasticâ paribus, pulsus omnes sunt æquveloces. Quòd si Medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ (^f). Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis Medii inversæ & ratione subduplicatâ vis elasticæ directæ. Q. E. D.

Hæc Propositio ulterius patebit ex constructione sequentis.

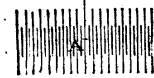
PROP. XLIX. PROB. XI.

Datis Medii densitate & vi elasticâ, invenire velocitatem pulsuum.

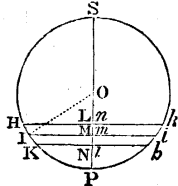
Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aëris nostri, comprimi; sitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, sit A: & quo tempore Pendulum illud oscillationem integram, ex itu & reditu compositam, peragit, eodem Pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli, radio A descripti, æquale.

Nam stantibus quæ in Propositione XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica EF, singulis vibrationibus describendo spatium PS, urgeatur in extremis itus & reditus cujusque locis, P & S, à vi elasticâ quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas, quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis est, oscillari possit: id adeo, quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cum oscillationum tempora sint in subduplicatâ ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis Penduli, cujus longitudo est A, in subduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ PS, seu PO, ad longitudinem A. Sed vis elastica, quæ lineola physica, EG, in locis suis extremis, P, S, existens urgetur, erat (in demonstratione Propositionis XLVII.)

(^f) Prop. XLVII. et Prop. XXIV.



ad ejus vim totam elasticam ut $HL-KN$ ad v , hoc est (cùm punctum K jam incidat in P) ut HK ad



v : & vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, est ad pondus lineolæ, ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG ; ideoque ex æquo, vis,

quâ lineola EG in locis suis P & S urgetur, est ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $v \times EG$, five ut $PO \times A$ ad vv , nam HK erat ad EG ut PO ad v . Quare cùm tempora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elasticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in subduplicatâ ratione vv ad $PO \times A$, atque ideo ad tempus oscillationis Penduli, cujus longitudo est A , in subduplicatâ ratione vv ad $PO \times A$, & subduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id est, in ratione integrâ v ad A . Sed tempore vibrationis unius, ex itu & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC . Ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium BC , est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut v ad A , id est, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius est A . Tempus autem, quo pulsus percurrit spatium BC , est ad tempus quo percurrit longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurrit longitudinem huic circumferentiæ æqualem. Q.E.D.

Corol. 1. Velocitas pulsuum ea est, quam acquirunt Gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & casu suo describendo dimidium altitudinis A . Nam tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisitâ, pulsus percurrit spatium, quod erit æquale toti altitudini A ; ideoque tempore oscillationis unius, ex itu & reditu compositæ, percurrit spatium æquale circumferentiæ circuli radio

A de-

A descripti: est enim tempus casus ad tempus oscillationis ut $ra-$ LIBER
dius circuli ad ejusdem circumferentiam. SECUNDUS.

Corol. 2. Unde cùm altitudo illa A fit ut Fluidi vis elastica directe & densitas ejusdem inverse; velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inverse & subduplicatâ ratione vis elasticæ directæ.

PROP. L. PROB. XII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium, quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. Q. E. I.

Scholium.

Spectant Propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cùm propagetur secundum lineas rectas, in actione solâ (per Prop. *XLII* & *XLIII*.) consistere nequit. Soni verò, propterea quòd à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quàm Aëris pulsus propagati, per Prop. *XLIII*. Confirmatur id ex tremoribus, quos excitant in corporibus objectis, si modò vehementes sint & graves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quovis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatum etiam ex velocitate sonorum: Nam cum pondera specifica Aquæ Pluvialis & Argenti Vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{1}{2}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aëris & Aquæ Pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera specifica Aëris & Argenti Vivi ut 1 ad 11890. Proinde cùm altitudo Argenti Vivi sit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërum nostrum subiectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum *Anglicorum* 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa, quam, in constructione superioris Problematis, nominavimus A . Circuli radio 29725 pedum descripti circumferentia est pedum 186768. Et cùm Pendulum digitos

digitos 39 $\frac{1}{2}$ longum oscillationem, ex ita & reditu compositam, tempore minorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; Pendulum pedes 29725, seu digitos 356700, longum oscillationem consimilem tempore minorum secundorum 190 $\frac{1}{2}$ absolvere debet. Eo igitur tempore Sonus progrediendo conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, per quam sonus utique propagatur in instanti. Cum pondus aëris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particulae aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulae aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos Sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{279}{9}$, seu 109, circiter, ob crassitudinem particularum aëris: & sic Sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde, quod vapores in aëris latentes, cum sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri, quo Soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celerius propagabitur per solum aërem verum, idque in subduplicatâ ratione minoris materiae. Ut si Atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus sonorum, supra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto Sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore Verno & Autumnali, ubi Aër per calorem temperatum rarefcit, & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At Hyberno tempore, ubi Aër per frigus condensatur, & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicatâ ratione densitatis; & vicissim Æstivo tempore debet esse velocior.

Constat

Constat autem per experimenta, quod soni, tempore minuti unius secundi, eundo conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142, *Parisienses* verò 1070. LIBER
SECUNDUS.

Cognitâ sonorum velocitate, innotescunt etiam intervalla pulsum. Invenit utique *D. Sauveur*, factis à se experimentis, quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; ideoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi 10 $\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde verisimile est, quod latitudines pulsum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur Soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur, ubi longissimè distamus à corporibus sonoris, quam cum proximè absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVII. libri hujus. Sed & cur soni in tubis stentorephonicis valde augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocos singulis recursibus à causâ generante augeri solet. Motus autem in tubis, dilatationem sonorum impediens, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo singulis recursibus impressio magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIO IX.

De motu Circulari Fluidorum.

HYPOTHESIS.

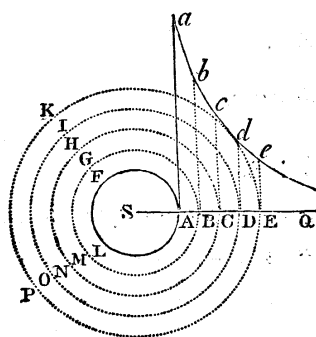
Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse Velocitati, quâ partes Fluidi separantur ab invicem.

P R O P.

PROP. LI. THEOR. XXXIX.

Si Cylindrus solidus infinite longus in Fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum, uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem, perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico, quod tempora periodica partium Fluidi sunt ut ipsarum distantiae ab axe Cylindri.

Sit AFL Cylindrus uniformiter circa axem s in orbem actus, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. distinguatur Fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneous est Fluidum^(a), impressiones contiguorum orbium, in se mutuo factæ, erunt (per hypothefin) ut eorum translationes ab invicem, & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est, vel minor, ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu, vel in contrariam, dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde, cum impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inversæ ut superficies, hoc est, inversæ ut superficierum distantiae ab axe. Sunt autem



differentiæ motuum angularium, circa axem, ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directæ & distantiae inversæ; hoc est, conjunctis rationibus, ut quadrata distantiarum inversæ. Quare, si ad infinitæ rectæ SABCDEQ partes singulas erigantur perpendicula, aa, bb, cc, dd, ee, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendiculari-

(^a) Vide Prop. LII. Not. c & d.

um duci intelligatur linea curva hyperbolica; erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum AA, BB, CC, DD, EE; id est, si, ad constituendum Medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut area hyperbolicae his summis analogæ AAQ, BBQ, CCQ, DDQ, EEQ, &c. Et tempora, motibus angularibus reciprocè proportionalia, erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut area DDQ; hoc est (per notas Curvarum Quadraturas) directè ut distantia SD. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum Fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiae ab axe Cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si Fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret Fluidi pars unaquæque in motu suo: erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiae ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si Cylindro & Fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium Fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti Cylindrorum & Fluidi systemati auferatur motus omnis angularis Cylindri exterioris, habebitur motus Fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si Fluido & Cylindro exteriori quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis Fluido, & paulatim per totum Fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri, quàm Fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam Fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violentur detentus; & accelerabitur ejus motus, quoad

usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quòd si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum Fluidi retardare; & nifi cylindrus interior, vi aliquâ extrinsecus impressâ, motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in Aquâ profundâ stagnante experiri licet.

PROP. LII. THEOR. XL.

Si Sphæra solida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum, uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem; perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico, quòd tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphære.

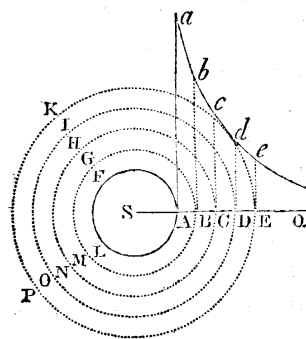
Caf. I. Sit *AFL* Sphæra uniformiter circa axem *s* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur Fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis^(b). Finge autem orbes illos esse solidos^(c); & quoniam homogeneum est Fluidum^(d), impressiones contiguorum orbium, in se mutuo factæ, erunt (per hypothefin) ut eorum translationes ab invicem & superficies continuæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est, vel minor, ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu, vel in contrariam, dirigitur. Proinde, ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde, cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differentiæ

motuum

^(b) Centro scilicet *s*, in plano aliquo per sphære polos ducto, intelligantur circuli innumeri omnium magnitudinum, qui circa axem sphære conversi, sphæricas superficies innumeras circum centrum commune *s* efficiant, quibus tota moles liquida distinguatur in orbes innumeros ejusdem crassitudinis. Circuli *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP* lineationis Newtonianæ sunt horum orbium æquatores.

^(c) Congelato utique liquore in orbibus singulis separatim; ita tamen ut densitas materiæ uniformis, quæ antè fuit, maneat. Dico liquorem in orbibus singulis separatim congelandum esse.

Nempe



motuum angularium circa axem ut ^{LIBER} hæ translationes applicatæ ad distan- ^{SECUNDUS.} tias, five ut translationes directè & distantiae inversè; hoc est, conjunctis rationibus, ut cubi distantiarum inversè. Quare si ad rectæ infinitæ *SABCEQ* partes singulas erigantur perpendiculara *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, mo-

tus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut aræ hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica, motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his aræ reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis *DIO* reciproce ut area *DdQ*, hoc est, per notas Curvarum Quadraturas, directè ut quadratum distantiae *SD*. Id quod volui primò demonstrare.

Caf. 2. A centro Sphære ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros^(e) secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum anteriorem, & duos laterales^(f). Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facti, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum rectâ pergens, movebi-

Nempe ut corpora solida disjuncta tot efficiat, quot sint orbes, nec in unum corpus solidum con-
crescat.

^(e) Quoniam homogeneum erat Fluidum, & densitas materiæ quæ Liquoris erat, ea in corporibus solidis, ex liquoris concretionem factis, manet, ideoque densitas materiæ in unoquoque orbe uniformis, & in omnibus eadem erit. Quapropter impressiones contiguorum orbium, &c.

^(f) Cum æquatoris plano parallelos.

^(f) Nempe superiorem alterum, alterum inferiorem in eadem sphærica superficie.

tur pro lege casûs primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege factô attritus annulorum ad latera nullus est (g); neque ideo motum, quò minùs hâc lege fiat, impedit. Si annuli, qui à centro æqualiter distant, vel citiùs revolverentur vel tardiùs juxta Polos quam juxta Eclipticam (h), tardiores accelerarentur, & velociore retardarentur ab attritu mutuò, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casûs primi. Non impedit igitur hic attritus, quo minùs motus fiat secundum legem casûs primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum à centro globi. Quod volui secundò demonstrare.

Caf. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motûs circularis, sed ad constitutionem Fluidi solummodò conducunt, perseverabit motus circularis ut priùs. His sectionibus annuli omnes quàm minimi asperitatem & vim attritus mutuui aut non mutabunt, aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportionem manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. Q. E. D. Cæterum cum motus circularis, & inde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam (h) quàm ad Polos; debet causa aliqua adesse, quâ particula singula in circulis suis retineantur; ne materia, quæ ad Eclipticam est (h), recedat semper à centro, &, per exteriora Vorticis, migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam (h) circulatione perpetuâ revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium Fluidi circa axem globi, sunt reciproci ut quadrata distantiarum à centro globi, & velocitates absolutæ reciproci ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in Fluido quiescente, similari & infinito, circa axem positione datum, uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus Fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque priùs cessabit in singulis Fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica singularum

(g) Propter æquales motus angulares annulorum omnium ejusdem solidi orbis spherici.

partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores, ob majorem suam velocitatem, atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis eâ actione perpetuò communicant; & exteriores illi eandem motûs quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eâque actione servant quantitatem motûs sui planè invariata; patet, quòd motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphericas duas quasvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quòd motum omnem, à materiâ interiore, acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem semper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam Vorticis. Sine tali principio necesse est, ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim, & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici, ad certam ab ipsius centro distantiam, innaret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ constanter revolveretur; hujus motu raperetur Fluidum in vorticem: & primò revolveretur hic Vortex novus & exiguus, unâ cum globo, circa centrum alterius, & interea latius ferperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eadem ratione, quâ hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus; sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuò, ob motum illum circularem, fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea, si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permetterentur, langueretur paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3 & 4. assignatam) & Vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures, datis in locis, circum axes positione datos, certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli eâ-

(h) Intellige Aequatorem.

dem ratione, quâ unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut Fluidi infiniti pars unaquæque eo agitur motu, qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde Vortices non definiuntur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique, per actiones Vorticum in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, uti in Corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis, quæ, in globos constanter impressæ, conservant hunc motus, materia, ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam, paulatim requiescet, & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si Fluidum simile claudatur in vase sphaerico, ac globi, in centro consistentis, uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes Fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quàm sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum à centro Vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum inclusum, & globus fervent hunc motum, & motu præterea communi angulari, circa axem quemvis datum, revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium Fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit, ut attritu ex uno latere non magis tardetur, quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus Fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi, & motu

(¹) Hujus Corollarii veritatem sic ostendimus. A Vase, Globo, et Liquore interposito, pro lege Corollarii 7, circumactis, auferatur motus quivis angularis communis z . Motus angularis qui in Globo reliquus est, dicatur g ; qui in orbe quovis Liquoris chn , e ; qui in orbe extremo ekf , seu vasis orbe, e . Erit igitur $g+z$ ad $c+z$ ut sc^2 ad sa^2 . Et $c+z$ ad $e+z$ ut se^2 ad sc^2 (per Cor. 7). Unde etiam $g+z$ ad $e+z$ ut se^2 ad sa^2 . Hinc si ponatur $e=0$, ut vas ablata motus ejus angularis parte z , ad quietem redigatur, erit $g+z$ ad z ut se^2 ad sa^2 ; et $c+z:z = se^2:sc^2$. Plani, motu ejus qui globi est contrario circumacti, dicatur motus angularis r . Tempus conversionis ejusdem plani dicatur π ; Globi, γ . Erit igitur, $\pi:\gamma = g:p$; et $\pi+\gamma:\gamma = g+p:p$. Sed $\pi+\gamma:\gamma = se^2:sa^2$. (Id enim Newtonus posuit.) Quare $g+p:p = se^2:sa^2$. At vero $se^2:sa^2 = g+z:z$, modò talis sit z , qui efficiat ut vas quiescat. Id enim à nobis ostensum

motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium Fluidi, respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi (¹).

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, datâ cum velocitate quâcunque moveatur, dabitur motus Fluidi. Nam si systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & Fluidum quiescant, & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per Fluidum totum in vas, & circumagetur vas, nisi violentur detentum; neque prius definient Fluidum & vas accelerari, quàm sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quòd si vasi aliquâ detineatur, vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad statum motus in Corollariis 8, 9 & 10, definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde verò, si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus Mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante Fluidò, neque motus suos in se mutuo per Fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquantur inter se, & systema totum, ad instar corporis unius solidi, simul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus suppono Fluidum ex materiâ, quoad densitatem & fluiditatem, uniformi constare. Tale est, in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similis, & æquales, ad æquales semper à se distantias, ubivis in Fluidò

tensum est.) Unde $g+z:z = g+p:p$. Et dividendo $g:z = g:p$. Unde $z=p$. Quare: eum fit $c+z:z = se^2:sc^2$ (id enim à nobis ostensum.) erit $c+p:p = se^2:sc^2$. Est autem p ad $p+c$ ut motus angularis Plani, contrariè circumacti, ad motum angularem, quo partes Liquoris in orbe chn Plano illi admoventur. Unde p erit ad $p+c$ ut tempus conversionis orbis chn , ratione ejus Plani, ad tempus quo Planum ipsum convertetur. Quare cum fit etiam $p:p+c = sc^2:se^2$, tempus primum erit ad posterius ut quadratum ex sc ad quadratum ex se . Et simili modo de alio quovis orbe Liquoris ostendetur, ejus tempus convertendi, ratione Plani contrariè circumacti, ad tempus, quo Planum ipsum convertitur, rationem habere quam quadratum ex orbis ejus semidiametro ad quadratum ex semidiametro vasis. Q. E. D.

constitutus,

constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia, per motum suum circularem, recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac pressione fit attritus partium fortior, & separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes Fluidi sunt alicubi crassiores, seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem, vel lubricitatem partium, vel lentore, aliâve aliquâ conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia, ubi minus fluida est, magis cohærebit & segnior erit; ideoque motum tardius recipiet & longius propagabit, quam pro ratione superius assignatâ. Si figura vasis non sit sphaerica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus; ubi angustiora, velociores; neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longius à centro, sed isto recessu tardefcent; & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, & sic per vices tardefcent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in Fluido infinito constitutio Vorticum innotescit, per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem Vorticum hæc Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem, siquâ ratione Phænomena Coelestia per vortices explicari possint. Nam Phænomenon est, quod Planetarum, circa Jovem revolvantium, tempora periodica sunt in ratione sesquuplicatâ distantiarum à centro Jovis; & eadem regula obtinet in Planetis, qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæc regulæ in Planetis utrisque quam accuratissimè, quatenus Observationes Astronomicæ hæcenus prodidere. Ideoque si Planetæ illi à Vorticibus, circa Jovem & Solem revolvantibus, deferantur, debebunt etiam hi vortices eadem lege revolvî. Verùm tempora periodica

periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicatâ distantiarum à centro motûs: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquiplicatam reduci, nisi vel materia Vorticis eo fluidior sit, quo longius distat à centro; vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, ex auctâ velocitate, quâ partes Fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione, quam ea est, in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, circumferentiam petent; & verisimile est, quodd, etiam si demonstrationum gratiâ hypothesein talem, initio Sectionis hujus, proposuerim, ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione, quam ea velocitatis est. Quo concessio, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quam duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si Vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuò celerius juxta circumferentiam; certè nec ratio sesquuplicatâ, neque alia quævis certa ac determinata, obtinere potest. Viderint itaque Philosophi, quo pacto Phænomenon illud rationis sesquuplicatæ per Vortices explicari possint.

P R O P. LIII. T H E O R. LXI.

Corpora, quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipsis partibus, quoad velocitatem & cursûs determinationem moventur

Nam si Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ, seu puncta phÿsica, datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contrâ, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo Vortice, & resolvatur in Fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ, jam fluidæ factæ, moveantur inter se. Negligatur igitur motus partium inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium, à centro æqualiter distantium,

tium, propterea quod Solidum, in Fluidum resolutum, fit pars Vorticis cæteris partibus confimilis. Ergo Solidum, si sit ejusdem densitatis cum materiâ Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quiescens. Sin densius fit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm prius; ideoque Vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ suâ, tanquam in æquilibrio constitutum, retinebatur, jam superans, recedet à centro, & revolvendo describet Spiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento si rarius fit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem nisi fit ejusdem densitatis cum Fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus Fluidi à centro Vorticis æqualiter distantibus. Q. E. D.

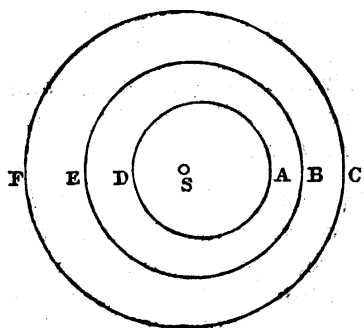
Corol. 1. Ergo Solidum, quod in Vortice revolvitur, & in eundem orbem semper redit, relativè quiescit in Fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si Vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem, ad quamlibet à centro Vorticis distantiam, revolvitur potest.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam

Planetæ, secundum hypothesein *Copernicæam*, circa Solem delati revolvuntur in Ellipsis umbilicum habentibus in Sole, &, radiis ad Solem ductis, areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent AB, BE, CF, orbem tres circa Solem s descriptos; quorum extimus, CF, circulus fit Soli concentricus, & interiorum duo-



rum Aphelia sint A, B, & Periphelia D, E. Ergo corpus, quod revolvitur in orbe CF, radio ad Solem ducto, areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem, quod revolvitur in orbe BE, tardius movebitur in Aphelio B, & velocius in Periphelio E, secundum leges Astronomicas; cum tamen, secundum leges Mechanicas, materia Vorticis,

in spatio angustiore inter A & c, velocius moveri debeat, quàm in spatio latiore inter D & F; id est, in Aphelio velocius quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter se. Sic in principio signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbem Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio signi Piscium ut ternarius ad binarium circiter; & propterea materia Vorticis, inter orbem illos, in principio Piscium debet esse velocior, quàm in principio Virginis in ratione ternarii ad binarium. Nam quo angustius est spatium, per quod eadem materiæ quantitas, eodem revolutionis unius tempore, transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra, in hac materiâ cœlesti relativè quiescens, ab eâ deferretur, & unâ circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialterâ. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minorum primorum septuaginta, & in principio Piscium minor quàm minorum quadraginta & octo: cum tamen (experimentiâ teste) apparens iste Solis motus major sit in principio Piscium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piscium. Itaque hypothesis Vorticum cum Phænomenis Astronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos, quàm ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo verò motus isti in spatiis liberis, sine Vorticibus, peraguntur, intelligi potest ex Libro Primo, & in Mundi Systemate jam plenius docebitur.

FINIS TOMI SECUNDI.

UNIVERSITÄT S. CUORE
BIBLIOTECA
numero 100532
done
cambio
data

CORRIGENDA IN CONTEXTU.

Pag. 98, lin. 32, pro *locum*, lege *loci*.

Pag. 273, lin. 6, pro *velocitatum*, lege *velocitatis*.

CORRIGENDA ET ADDENDA IN NOTIS.

P. 51, *Notæ*¹, *hec addantur*. Cor. H. Velocitas corporis in Circulo circumacti, ea erit, quam corpus, urgente vi quâdam uniformi, quæ ejus sit æqualis quæ in circuli circuitu viget, spatium dimidii radii cadendo adeptum esset. Sumatur enim AE (fig. Not.¹) radii AD semissis, arcusque AF æqualis radio. Erit igitur AC:AF = AF:AE. Arcus igitur AF motu corporis per circulum æquabili, et spatium AE casu recto, hoc est motu æquabiliter accelerato, eodem tempore conficiuntur. At verò eodem tempore quo casu recto conficitur spatium AE, conficiatur, velocitate illâ quam corpus in æ adeptum erit, duplum spatium AE, sive radius AD. Arcus igitur AF et radius AD æqualibus temporibus conficiantur, velocitate uterque æquabili; ille quidem eâ quæ est corporis in Circulo circumacti, hic verò eâ quam corpus, rectâ cadendo, in loco æ adeptum esset. Sunt autem arcus AF, radiusque AD inter se æquales. Quare et velocitates quibus spatia illa æqualia temporibus æqualibus conficerentur, eæ inter se æquales erunt. Velocitas igitur corporis in Circulo velocitati corporis rectâ cadentis in loco æ æqualis. Q. E. D.

Cor. H. 2. Tempus quo corpus, urgente vi quâdam uniformi, quæ æqualis sit ejus quæ in Circuli circuitu viget, casu recto dimidium radium conficiat, ad tempus conversionis integræ in Circulo rationem habet, quam radius ad circuli circuitum. Patet ex demonstratione superioris.

P. 83, *Notæ*², *hec addantur*. Cor. H. 2. Si corpus aliquod à loco x in locum r rectâ cadat, urgente utique vi quâdam uniformi, quæ ejus sit æqualis, quâ corpus per Ellipsin paf incedens urgetur versus umbilicum g in loco p (fig. Not.²); tum si ea sit longitudo spatii x r, ut corporis rectâ cadentis eadem sit, in loco r, quæ alterius, per Ellipsin lati, in loco p velocitas; rectangulum sub x r et axe transverso Ellipseos rectangulo sub rectis p g, p s, à puncto Ellipseos p ad umbilicos ductis, æquale erit. Capiatur enim x v dimidiæ p g æqualis. Velocitas corporis rectâ cadentis, in loco v, eæ erit quæcum Corpus, urgente vi centrali qualis est in loco Ellipseos p, in circulo circum centrum g in distantia g r circumageretur. (Lib. I. Sect. II. Not.¹, Cor. H.) Sed recta t r ad rectam t v rationem habet duplicatam ejus quam velocitas in loco r ad velocitatem in loco v: duplicatam igitur ejus quam velocitas in loco p, corporis per Ellipsin lati, ad velocitatem corporis circum centrum g in distantia g r circumacti. Harum autem velocitatum duplicata ratio ea est quam s p habet ad c a. Erit igitur t r ad t v ut s p ad c a. Quare t r : 2 t v vel p g = s p : 2 c a. Quare t r x 2 c a = p s x p g. Q. E. D. Pulcherrimum hoc Theorema Boscovicii est. Demonstratio à nobis.

Pag. 145, lin. not. 10, pro *evadit*, lege *evadet*.

Pag. 181, lin. penult. pro *interceptæ*, lege *intercepta*.

Pag. 210, not. f, lin. 2, dele *necnon SK, ST*.

Pag. 244, not. g, lin. 6, pro *curvi linearis*, lege *curvilinearis*.

Pag. 275, lin. not. 5, pro *representari*, lege *representari*.

Pag. 281, lin. not. 1, pro **formulis & Idæa generationis quantitatum**, lege *formulis * & Idæa generationis quantitatum**.

Pag. 287, lin. not. 2. In membro æquationis ultimo in numeratore lege $\frac{1}{2}$ So¹.

Pag. 320, lin. not. 37, pro *confenda*, lege *confenda*.

Pag. 369, lin. not. ult. pro *efficiet*, lege *efficiat*.

Pag. 386, lin. not. 12, pro *istius modi*, lege *istiusmodi*.

Pag. 419, lin. not. 9, pro *tate*, lege *unitate*.